UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI SALERNO

DIPARTIMENTO DI MATEMATICA

CORSO DI LAUREA IN MATEMATICA

TESI DI LAUREA
IN
MATEMATICA

Geometria senza punti: approcci metrici e dualità logiche

Relatore:
Ch.ma Prof.
Cristina Coppola

Candidata:
Federica Di Stefano
Matr.: 0512300515

ANNO ACCADEMICO 2015/2016

“La matematica è il gioco più bello del mondo. Assorbe più degli scacchi, scommette più del poker, e dura più di monopoli. È gratuita. E può essere giocata ovunque - Archimede lo ha fatto in una vasca da bagno.”

Richard J. Trudeau

Indice

Introduzione

Il concetto di *punto* rappresenta una costante in ogni trattazione geometrica, a partire da Euclide che nei suoi *Elementi* riserva ad esso la prima delle definizioni del I libro, fino ad arrivare a studi più recenti, come ad esempio l'assiomatizzazione rigosa e formale presentata da Hilbert nell'opera *Grundlagen der Geometrie*. Tutte questa trattazioni sono caratterizzate dal considerare il punto come concetto primitivo: un'entità adimensionale spaziale, caratterizzata unicamente dalla propria posizione.

Un approccio completamente diverso è quello che nascerà a partire dalle analisi effettuate da A. N. Whitehead nelle opere *An Inquiry Concerning the Principle of Natural Knowledge*, *The Concept of Nature* e *Process and Reality* ([11], [12] e [13]). Tali analisi, di carattere filosofico, riguardano lo studio del continuo geometrico e, principalmente, i processi di astrazione che conducono alla definizione di punto. Infatti le idee di Whitehead hanno aperto la strada allo sviluppo di una serie di studi volti ad una fondazione rigorosa e formale della geometria, in cui a partire dal concetto di regione, si possa pervenire ad una definizione di *punto* tramite opportune classi di regioni 'sempre più piccole'. L'insieme delle ricerche sviluppate in questa direzione vanno sotto il nome di *geometria senza punti*.

In questa tesi l'attenzione verrà focalizzata sui possibili approcci metrici alla geometria senza punti, come mostrato da Coppola e Gerla in [2], con lo scopo di definire una metrica nell'insieme dei punti. Pertanto, accanto alle nozioni primitive di *regione* e di *inclusione* tra regioni, verranno definiti una *distanza* e un *diametro*. Negli approcci illustrati si andranno a definire opportune strutture caratterizzate da assiomi inerenti ai concetti di distanza e diametro di regioni. A partire da tali strutture, tramite una opportuna definizione di *punto*, che riprenda l'idea intuitiva di regione molto piccola, e di distanza tra punti, sarà possibile dare struttura di spazio metrico all'insieme dei punti. Tali approcci verranno dualizzati nell'ambito della logica a più valori. Per fare ciò saranno proposte diverse teorie del primo ordine nella logica a più valori. Ciascun modello di tali teorie, caratterizzato da predicati vaghi che esprimono concetti di natura geometrica, sarà associato ad un modello delle strutture presentate nei diversi approcci metrici. Ciò consentirà di associare ogni modello delle teorie presentate ad uno spazio metrico.

Più nello specifico la tesi è suddivisa come segue.

Nel capitolo 1 sono elencate alcune nozioni relative agli spazi metrici e alla logica a più valori che risultano utili per la trattazione successiva.

Nel capitolo 2, seguendo la trattazione fatta in [6], dopo una contestualizzazione storica delle problematiche associate al concetto di punto, sono esposte le due formalizzazioni delle idee di Whitehead corrispondenti a due approcci differenti: il primo basato sul concetto di *inclusione* tra regioni, che verrà poi sostituito con il concetto di *connessione* tra regioni nel secondo approccio. Saranno analizzate le motivazioni che hanno portato a tale passaggio. In entrambi i casi, a partire dalla nozione di *processo di astrazione*, sarà definita la classe degli *elementi geometrici*. In tale classe vengono identificati come *punti* gli elementi geometrici che non contengono propriamente nessun altro elemento geometrico, in linea con la definizione euclidea. Al termine di questo capitolo vengono definiti modelli delle teorie precedentemente illustrate, a partire dalla classe dei chiusi regolari.

Nel capitolo 3 sono illustrati tre possibili approcci metrici alla geometria senza punti: il primo basato sui concetti primitivi di regione, inclusione, distanza tra regioni e diametro di regioni; il secondo approccio formalizzato a partire dalle nozioni primitive di regione, inclusione e diametro; il terzo basato unicamente sui concetti primitivi di regione e distanza tra regioni. In ciascuno di essi si andranno a definire particolari strutture attraverso le quali, definendo i punti come classi di processi di astrazione costituiti da regioni di diametro sempre più piccolo, sarà possibile definire una metrica d tra punti. In particolare, nel primo approccio si andranno a definire i *ppm-spazi* a partire dai quali si definisce una pseudo-metrica d nella classe dei processi di astrazione. Considerando la struttura quoziente, il cui sostegno è costituito dall'insieme dei punti, tale funzione estesa alle classi sarà una metrica. Nel secondo approccio si andrà a definire una differente classe di strutture, la classe dei *diametric poset* (si veda anche [9] e [10]). Verrà mostrato come a ciascun *diametric poset*, definita una distanza tra regioni, è associato un *ppm-spazio* e pertanto uno spazio metrico. Nel terzo approccio, considerata una distanza tra regioni soddisfacente le proprietà delle quasi-pseudometriche, si definirà una classe di strutture dette *spazi quasi-metrici di regioni.* Definita una relazione di pre-ordine nell'insieme delle regioni e la nozione di diametro, si mostrerà che a partire da tali strutture l'insieme dei processi di astrazione sarà dotato di struttura di spazio pseudo-metrico, pertanto il suo quoziente sarà uno spazio metrico.

Infine nel capitolo 4, per ciascuno degli approcci metrici proposti, verranno definite delle teorie del primo ordine della logica a più valori, in modo da dualizzare tali approcci nell'ambito della logica a più valori. Per trasformare l'approccio metrico fornito dai *ppm-spazi* sarà definita una teoria del primo ordine, detta *c-s-teoria*, il cui linguaggio L sarà costituito dai simboli di predicato ≤, *'Close' e 'Small'*. Questi ultimi saranno interpretati da predicati vaghi di natura geometrica. Attraverso un generatore additivo, associato a una t-norma archimedea, sarà mostrato come ciascun modello della teoria proposta può essere associato ad un *ppm-spazio* e pertanto ad uno spazio metrico. Passando a considerare l'approccio metrico dato dai diametric poset, si definirà una teoria del primo ordine, detta *s-teoria*, caratterizzata da un linguaggio L con i simboli di predicato ≤ e *'Small'*. Come nel caso precedente attraverso un generatore additivo ciascun modello di tale teoria verrà trasformato in un *diametric poset* e quindi sarà associato ad uno spazio metrico. Per quanto riguarda il terzo approccio metrico, in tal caso si andrà a definire una teoria del primo ordine, con il simbolo di predicato '*Incl*', interpretato come una inclusione graduata. Attraverso un generatore additivo, come nei casi precedenti, ciascun modello di tale teoria sarà trasformato in un uno *spazio quasi-metrico di regione* e quindi sarà associato ad uno spazio metrico.

Capitolo 1

Nozioni preliminari

Nel seguente capitolo sono richiamate alcune nozioni di base relative ai due ambiti a cui gli argomenti trattati nella tesi fanno riferimento: l'ambito metrico e quello della logica a più valori. Tali nozioni saranno quelle che intervengono nel corso della trattazione nei capitoli seguenti.

1.1 Nozioni metriche

Sia X un insieme non vuoto, sia d una funzione:

$$d\colon (X \times X) \to [0, \infty) \quad (*)$$

È possibile dare la seguente definizione.

Definizione 1.1. La funzione d, definita in $(*)$, si dice una *metrica (o distanza) su X* se e solo se sono verificate le seguenti proprietà, $\forall\, x, y, z \in X$:

(i) $d(x,y) = 0 \Rightarrow x = y$

(ii) $d(x,x) = 0$

(iii) $d(x,y) = d(y,x)$ $\quad (\textit{proprietà di simmetria})$

(iv) $d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y)$ $\quad (\textit{disuguaglianza triangolare})$

Definizione 1.2. La struttura (X, d) si definisce *spazio metrico* se e solo se la funzione d è una metrica su X.

Definizione 1.3. Sia d la funzione definita in $(*)$, d si dice *pseudometrica* se e solo se sono soddisfatte le proprietà

(i) $d(x,x) = 0$

(iii) $d(x,y) = d(y,x)$

(iv) $d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y)$

Sia d una *pseudometrica* su X allora la struttura (X, d) si definisce *spazio pseudometrico.*

Osservazione. Ad ogni spazio pseudometrico (X, d) si può associare uno spazio metrico (X', d') ottenuto quozientando X rispetto la relazione di equivalenza:

$$x \equiv x' \Leftrightarrow d(x, x') = 0$$

Pertanto $X' = \{[x]: x \in X\}$, con $[x] = \{x' | \, d(x, x') = 0\}$, e la distanza d' tra classi di equivalenza sarà:

$$d'([x], [y]) = d(x, y)$$

Sia d la funzione definita in $(*)$, si considerino le seguenti proprietà aggiuntive:

$(v)\ d(x, y) \leq d(x, z) \vee d(z, y) \quad (disuguaglianza\ triangolare\ forte)$

$(vi)\ d(x, y) = 0\ e\ d(y, x) = 0\ \Rightarrow x = y$

Allora è possibile dare la definizione di quasi-metrica e ultrametrica.

Definizione 1.4. Sia d la funzione definita in (*). Tale funzione si dice *quasi-metrica* se e solo se sono soddisfatte le proprietà:

$(i)\ d(x, y) = 0\ \Rightarrow x = y$

$(ii)\ d(x, x) = 0$

$(iv)\ d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$

$(vi)\ d(x, y) = 0\ e\ d(y, x) = 0\ \Rightarrow x = y$

Data d *quasi-metrica su X* allora la struttura (X, d) si definisce *spazio quasi-metrico*. La funzione d si definisce *quasi-pseudometrica su X* se soddisfa le proprietà $(ii), (iv)\ e\ (vi)$. In tal caso, la struttura (X, d) si dice *spazio quasi-pseudometrico*.

Definizione 1.5. Sia d la funzione definita in (*), d è un'*ultrametrica* se alla *diseguaglianza triangolare* si sostituisce la *disuguaglianza triangolare forte*. Assegnata *d ultrametrica* la struttura (X, d) si definisce *spazio ultrametrico*.

Osservazione. Sostituendo la disuguaglianza triangolare forte nelle nozioni di pseudometrica e quasi-metrica è possibile parlare di *pseudo ultrametriche* e *quasi-ultrametriche.*

Osservazione. La funzione *d* definita può essere estesa considerando come insieme dei valori l'intervallo $[0, \infty]$: ciò significa che la distanza tra due qualsiasi elementi può assumere valore ∞.

Definizione 1.6. In uno spazio metrico (X, d) si consideri un sottoinsieme E non vuoto. Preso un generico elemento $x \in X$ è possibile definire la distanza tra *x* e il sottoinsieme E:

$$d(x, E) = \inf\{d(x, y) |\, y \in E\} = d(E, x)$$

Definizione 1.7. Dato uno spazio metrico (X, d) per ogni coppia si sottoinsiemi non vuoti $Y\ e\ Z$ si può definire la distanza tra *Y* e *Z* nel modo seguente:

$$d(Y, Z) = \inf\{d(y, z) |\, y \in Y\ e\ z \in Z\} = d(Z, Y)$$

Definizione 1.8. Sia $X \neq 0$ e sia *d* una *metrica su X* definita nel modo seguente:

$$d: X \times X \to [0, \infty]$$

Si definisce il *diametro* di un sottoinsieme *Y* di *X* nel modo seguente:

$$diam(Y) = \sup\{d(x, y) |\, x, y \in Y\}$$

Se $diam(Y) \neq \infty$ il sottoinsieme Y si dice limitato.

Si consideri (X, d) spazio metrico, è possibile dare la seguente definizione di *intorno sferico*.

Definizione 1.9. Sia (X, d) uno spazio metrico. Fissato un $x_0 \in X$ e $r > 0$, si definisce intorno sferico di centro x_0 e raggio r l'insieme:

$$I(x_0, r) = \{x \in Z: d(x, x_0) < r\}$$

Osservazione. La definizione di intorno sferico è ben posta anche se si considera come ambiente uno spazio *pseudometrico*.

Definizione 1.10. In uno spazio metrico, un insieme A si definisce *aperto* se e solo se per ogni $x \in A$ esiste $I(x, r)$, intorno centrato in *x* di raggio *r*, contenuto in A.

Definizione 1.11. In uno spazio metrico, un insieme *X* si dice *chiuso* se e solo se il suo complemento è un aperto.

La *chiusura* di un sottoinsieme *X* si definisce come l'intersezione di tutti i chiusi che lo contengono, mentre l'*interno* di un sottoinsieme *X* si definisce come l'unione di tutti gli aperti che sono contenuti nel sottoinsieme. Siano *c* e *i* gli operatori che ad ogni sottoinsieme *X* associano, rispettivamente, la sua chiusura *c(X)* e il suo interno *i(X)*.

Definizione 1.12. In uno spazio metrico un insieme *X* chiuso si dice *regolare* se e solo se *X* coincide con la *chiusura* del suo *interno*.

Definizione 1.13. In uno spazio metrico un insieme A aperto si dice *regolare* se e solo se A coincide con l'interno della sua chiusura.

Allora un sottoinsieme X dello spazio euclideo si dice *chiuso regolare* se e solo se $X = c\big(i(X)\big)$, mentre un sottoinsieme X si dice *aperto regolare* se solo se $X = i\big(c(X)\big)$.

1.2 Nozioni logiche: l'algebra dei valori di verità

Nelle strutture di base per i valori di verità della logica fuzzy e della logica a più valori, un ruolo centrale è giocato dai *reticoli residuati* dotati di due operazioni aggiuntive: una detta *moltiplicazione* e l'altra chiamata *residuo*, definita a partire dalla prima. Tre esempi rilevanti sono le algebre di Łukasiewicz, di Gödel e di Goguen, in cui il reticolo residuato ha come sostegno l'intervallo reale [0,1] e differiscono tra loro univocamente per la scelta dell'operazione di moltiplicazione (e quindi per il relativo residuo).

In questo paragrafo verranno enunciate le principali proprietà di una classe di moltiplicazioni chiamate *norme triangolari*, brevemente t-norme, introdotte per la prima volta da K. Menger nel 1977, con lo scopo di generalizzare il concetto di disuguaglianza triangolare. Tali operazioni divennero poi interessanti per la logica fuzzy in quanto conservano le principali proprietà del connettivo logico ‘and’ e, quindi, sono una naturale generalizzazione della congiunzione classica per sistemi di ragionamento a più valori. L’insieme delle t-norme può essere suddiviso in diverse classi, a seconda delle proprietà soddisfatte.

Nella successiva trattazione si andranno a considerare logiche a più valori in cui l’insieme dei valori di verità è costituito dall’intervallo reale [0,1] e il connettivo di congiunzione viene interpretato da una *t-norma continua archimedea*.

Definizione 1.14. Una *t-norma continua* è una operazione binaria continua

$$\otimes: [0,1]\times[0,1] \rightarrow [0,1]$$

tale che, per ogni $a, b, c \in [0,1]$, sono soddisfatte le seguenti proprietà:

$(i)\ a\otimes b = b\otimes a\ (commutiva)$

$(ii)\ (a\otimes b)\otimes c = a\otimes(b\otimes c)\ (associativa)$

$(iii)\ a \leq b\ \Rightarrow a\otimes c \leq b\otimes c\ (isotonica)$

$(iv)\ 1\otimes a = a\ e\ 0\otimes a = 0\ (condizioni\ di\ limite)$

Una volta definita una t-norma è possibile definire il *residuo* associato a ⊗, che consente di interpretare l’implicazione ⇒.

Definizione 1.15. Data una t-norma ⊗, l’operazione → così definita:

$$x \rightarrow y\ \coloneqq \sup\{z: x\otimes z \leq y\}$$

si dice *residuo associato a* ⊗.

Importanti esempi di t-norme continue sono:

- La t-norma di Gödel: $x\otimes y\ \coloneqq \min\{x, y\}$
- La t-norma di Goguen: $x\otimes y\ \coloneqq x \cdot y\ (prodotto\ usuale\ tra\ numeri\ reali)$
- La t-norma di Łukasiewicz: $x\otimes y \coloneqq \max\{0, x + y - 1\}$

I cui corrispondenti residui sono:

- Residuo associato alla t-norma di Gödel:

$$x \to y := \begin{cases} 1 & se\ x \leq y \\ y & altrimenti \end{cases}$$

- Residuo associato alla t-norma di Goguen:

$$x \to y := \begin{cases} 1 & se\ x \leq y \\ \frac{y}{x} & altrimenti \end{cases}$$

- Residuo associato alla t-norma di Łukasiewicz:

$$x \to y := \begin{cases} 1 & se\ x \leq y \\ x + y - 1 & altrimenti \end{cases}$$

Nella seguente proposizione sono riassunte le proprietà principali del residuo → associato a una *t-norma* ⊗.

Proposizione 1.1. Sia ⊗ una *t-norma continua* e sia → il *residuo* ad essa associato, allora per ogni $x, y, z \in [0,1]$:

(i) $x \otimes z \leq y \Leftrightarrow z \leq x \to y$

(ii) $(x \to y) \otimes (y \to z) \leq x \to z$

(iii) $x \to y = 1\ e\ y \to x = 1\ \Rightarrow\ x = y$

(iv) $x \to y = 1\ \Leftrightarrow x \leq y$

(v) $(z \to y) \otimes z \leq y$

Definizione 1.16. Una t-norma continua ⊗ si dice *archimedea* se per ogni $x, y \in [0,1]$, con $y \neq 0$, esiste un numero naturale *n* tale che:

$$x^{(n)} < y$$

dove $x^{(n)}$ è definito ricorsivamente:

$$x^{(1)} := x$$

$$x^{(n+1)} = x^{(n)} \otimes x$$

Osservazione. Tra gli esempi di t-norme proposti, sono archimedee: la t-norma di Goguen e la t-norma di Łukasiewicz. La t-norma di Gödel è un esempio di t-norma continua e non archimedea.

Esiste un metodo generale per definire t-norme continue per cui è necessario introdurre la nozione di generatore additivo.

Definizione 1.17. Si definisce *generatore additivo* una funzione

$$f: [0,1] \to [0,\infty]$$

continua e strettamente decrescente tale che $f(1) = 0$.

Definizione 1.18. Sia f un generatore additivo. La *pseudoinversa* di f è la funzione:

$$f^{[-1]}: [0,\infty] \to [0,1]$$

definita ponendo:

$$f^{[-1]}(y) \coloneqq \begin{cases} f^{-1}(y) & se\ y \in f([0,1]) \\ 0 & altrimenti \end{cases}$$

Nella seguente proposizione sono riportate alcune proprietà relative al generatore additivo f e alla funzione *pseudoinversa* $f^{[-1]}$.

Proposizione 1.2. Sia f un generatore additivo. Allora:

(i) $f^{[-1]}$ è $una\ funzione\ order-reversing$

(ii) $f^{[-1]}(0) = 1\ e\ f^{[-1]}(\infty) = 0$

(iii) $f([0,1]) = [0, f(0)]$

(iv) $f^{[-1]}\big(f(x)\big) = x\ per\ ogni\ x \in [0,1]$

(v) $f\left(f^{[-1]}(x)\right) = \begin{cases} x & se\ x \in f([0,1]) \\ f(0) & altrimenti \end{cases}$

(vi) $f\left(f^{[-1]}(x)\right) \leq x$

Definizione 1.19. Sia $f: [0,1] \to [0,\infty]$ un generatore additivo e sia

$$\otimes: [0,1]\times[0,1] \to [0,1]$$

l'operazione definita ponendo per ogni $x, y \in [0,1]$:

$$x \otimes y := f^{[-1]}\big(f(x) + f(y)\big)$$

Allora f è un generatore additivo di $\otimes$.

Proposizione 1.3. L'operazione $\otimes$: $[0,1]\times[0,1] \to [0,1]$ è una *t-norma continua archimedea* se e solo se possiede un generatore additivo. In tal caso il residuo associato alla t-norma sarà definito per ogni $x, y \in [0,1]$:

$$x \to y := f^{[-1]}\big(f(y) - f(x)\big)$$

Osservazione. Riprendendo gli esempi proposti di t-norme, il generatore additivo della t-norma di Goguen è $f(x) := -\ln(x)$ e il generatore additivo della t-norma di Łukasiewicz è $f(x) := 1 - x$.

1.3 Nozioni logiche: logiche del primo ordine a più valori

Per la teoria del primo ordine a più valori si andranno a considerare i linguaggi costituiti da:

- i connettivi logici: $\wedge, \Rightarrow e\ Ct$
- i quantificatori: $\forall, \exists$
- le costanti logiche: $\underline{0}, \underline{1}$
- simboli di predicato
- simboli per costante e simboli di operazione

I connettivi logici '$\wedge$' e '$\Rightarrow$' vengono interpretati, rispettivamente, con una *t-norma* e il relativo *residuo*, mentre il connettivo logico 'Ct' viene interpretato con la funzione ct: $[0,1] \to [0,1]$ definita ponendo:

$$ct(x) := 1\ se\ x = 1$$

$$ct(x) := 0\ altrimenti$$

Data una certa formula φ, il significato di $Ct(\varphi)$ è che la formula φ è completamente vera. Per quanto riguarda i quantificatori $\forall\ e\ \exists$, essi vengono interpretati, rispettivamente, come l’estremo superiore e l’estremo inferiore e le costanti logiche $\underline{0}, \underline{1}$ con i valori di verità 0 e 1.

Definizione 1.20. Dato un insieme non vuoto *D*, si dice *relazione fuzzy n-aria in D* una mappa:

$$r: D^n \rightarrow [0,1]$$

Osservazione. Una relazione fuzzy n-aria è un *insieme fuzzy*, infatti un insieme fuzzy A è indentificato da una funzione:

$$A: U \rightarrow L$$

dove U è l’universo all’interno del quale vengono presi gli elementi e L è l’insieme dei valori di verità che, come è stato già specificato, sarà considerato uguale all’intervallo [0,1]. Sia $x \in U$ allora $A(x) \in L$ indica il grado di appartenenza di *x* in *A*.

Definizione 1.21. Si dice *crisp* una relazione fuzzy in cui gli unici valori assunti sono 1 e 0.

Data una classica relazione $R \subseteq D^n$, essa può essere identificata con una relazione *crisp* cosi definita:

$$c_R(d_1, d_2, \dots, d_n) \coloneqq 1 \; se \; (d_1, d_2, \dots, d_n) \in R$$

$$c_R(d_1, d_2, \dots, d_n) \coloneqq 0 \; altrimenti$$

In sostanza si va ad indentificare un una certa relazione *R* con la propria funzione caratteristica.

Osservazione. Le relazioni fuzzy rappresentano una naturale generalizzazione delle classiche relazioni.

Definizione 1.22. Una *interpretazione a più valori* (D, I) *di una logica a più valori* è costituita da un insieme non vuoto *D* e da una funzione *I* tale che: ad ogni costante logica *c* associa un elemento $I(c) \in D$, ad ogni simbolo di operazione n-aria associa una operazione n-aria in D e ad ogni simbolo di relazione n-aria $\underline{r}$ associa una relazione fuzzy n-aria $r = I(\underline{r})$ come definita.

Data una interpretazione a più valori, l'interpretazione $I(t): D^n \to D$ di un termine t è definita come nella logica classica.

La valutazione di una formula α è definita in maniera vero-funzionale come segue.

Definizione 1.23. Data una interpretazione a più valori (D, I), sia α una formula le cui variabili sono $x_1, x_2, \dots, x_n$ e siano $d_1, d_2, \dots, d_n$ elementi di D, il valore $Val(\alpha, d_1, d_2, \dots, d_n)$ è definito, per ricorsione sulla complessità di α, nel modo seguente:

$$Val(\underline{0}, d_1, d_2, \dots, d_n) \coloneqq 0 \ e \ Val(\underline{1}, d_1, d_2, \dots, d_n) \coloneqq 1$$

$$Val(\underline{r}(t_1, t_2 \dots, t_p), d_1, d_2, \dots, d_n) \coloneqq I(\underline{r})\left(I(t_1)(d_1, \dots, d_n) \dots I(t_p)(d_1, \dots, d_n)\right)$$

Siano $\underline{\diamond}$ e $\underline{\bullet}$ un connettivo binario e un connettivo unario, rispettivamente, e

$$\diamond: [0,1]\times[0,1] \to [0,1], \quad \bullet: [0,1] \to [0,1]$$

le rispettive interpretazioni, allora:

$$Val(\alpha_1 \underline{\diamond} \alpha_2, d_1, d_2, \dots, d_n) \coloneqq Val(\alpha_1, d_1, d_2, \dots, d_n) \diamond Val(\alpha_2, d_1, d_2, \dots, d_n)$$

$$Val(\underline{\bullet}\alpha, d_1, d_2, \dots, d_n) \coloneqq \bullet(Val(\alpha, d_1, d_2, \dots, d_n))$$

$$Val(\forall x_h \beta, d_1, d_2, \dots, d_n) \coloneqq \inf\{Val(\beta, d_1, d_2, \dots, d_{h-1}, d, d_{h+1} \dots, d_n): d \in D\}$$

$$Val(\exists x_h \beta, d_1, d_2, \dots, d_n) \coloneqq \sup\{Val(\beta, d_1, d_2, \dots, d_{h-1}, d, d_{h+1} \dots, d_n): d \in D\}$$

Se α è una formula chiusa allora $Val(\alpha, d_1, d_2, \dots, d_n)$ non dipende dalla scelta degli elementi $d_1, d_2, \dots, d_n$, pertanto si scriverà semplicemente $Val(\alpha)$. Nel caso in cui ci siano variabili libere in α, siano $x_1, x_2, \dots, x_n$ tali variabili, con $Val(\alpha)$ si andrà ad indicare $Val(\forall x_1, \dots, \forall x_n(\alpha))$, dove $\forall x_1, \dots, \forall x_n(\alpha)$ è la chiusura universale della formula α.

Definizione 1.24. Data una interpretazione a più valori (D, I), una formula α è soddisfatta da (D, I) se $Val(\alpha) = 1$. Data una teoria T, ovvero un insieme di formule, se ogni formula di T è soddisfatta da (D, I) allora (D, I) è un modello a più valori della teoria T.

Osservazione. La logica a più valori appena definita è abbastanza espressiva. Infatti, sia $\underline{r}$ un simbolo di relazione n-aria, allora la formula:

$$\forall x_1, \dots, \forall x_h \left(Ct \left(\underline{r}(x_1, x_2, \dots, x_n) \right) \Leftrightarrow \underline{r}(x_1, x_2, \dots, x_n) \right)$$

è soddisfatta se e solo se $\underline{r}$ è interpretata da una relazione crisp. Infatti è sufficiente osservare che la formula è soddisfatta se e solo se:

$$ct\big(r(d_1, d_2, \dots, d_n)\big) = r(d_1, d_2, \dots, d_n)$$

per ogni $d_1, d_2, \dots, d_n \in D$. Questo inoltre consente di affermare che la proprietà di "essere crisp" è una proprietà del primo ordine della logica a più valori. Di conseguenza tutte le classiche nozioni che possono essere definite nella logica classica del primo ordine possono essere definite anche in una logica a più valori, sempre del primo ordine.

In particolare si può dare la seguente definizione.

Definizione 1.25. Dato un linguaggio con un simbolo di relazione $\leq$, si denota con $'Order(\leq)'$ la richiesta che l'interpretazione di $\leq$ sia una *relazione crisp d'ordine*.

Capitolo 2

La geometria senza punti

Il concetto di punto è sicuramente uno dei più importanti e misteriosi di tutta la matematica a cui si va a legare uno dei processi fondamentali del pensiero razionale, il processo di astrazione[1]. Nelle usuali trattazioni geometriche il punto viene assunto come concetto primitivo, tuttavia è lecito chiedersi: è necessario, per una trattazione rigorosa della geometria, assumere i punti come enti primitivi? In questo capitolo, a partire dalle idee di A. N. Whitehead, si darà risposta a tale domanda costruendo un ambiente matematico all'interno del quale il punto può essere definito a partire da una classe di oggetti, detti *regioni*, e da una relazione binaria definita in essa.

2.1 Il concetto di punto

La geometria nel corso dei tempi ha subito notevoli stravolgimenti, tuttavia una costante di ogni trattazione geometrica è quella di considerare i punti come oggetti primitivi. A partire da Euclide che negli *Elementi* definisce il punto dicendo che *"il punto è ciò che non ha parti"*, fino ad arrivare all'estremo formalismo di Hilbert che, nell'opera *Fondamenti della geometria*, scrive così:

"Consideriamo tre diversi sistemi di oggetti: chiamiamo punti gli oggetti del primo sistema [...]; chiamiamo rette gli oggetti del secondo sistema [...]; chiamiamo piani gli oggetti del terzo sistema [...]"

Già prima di Euclide nella scuola pitagorica i punti rivestivano un ruolo importante. Secondo i pitagorici alla base di tutto c'erano i numeri interi intesi come aggregati di punti-unità, che pertanto erano gli elementi ultimi che costituiscono il mondo. Tale

[1] Processo di costruzione o definizione di nuovi enti, a partire da classi di oggetti. Consiste nel considerare come un nuovo ente individuale una classe di enti precedentemente definiti (processo di entificazione) o, nel considerare come un nuovo ente 'quello che vi è di comune' tra gli elementi di una data classe.

ideologia comportava che la grandezza di una qualsiasi figura geometrica dovesse essere esprimibile da un numero intero, le unità-punto erano proprio l'unita di misura da cui partire. Con il *paradosso dell'incommensurabilità* le idee della scuola pitagorica entrarono in crisi: i numeri interi non erano adatti a definire tutte le grandezze geometriche, pertanto la geometria doveva essere una scienza autonoma e distinta dall'aritmetica. Gli *Elementi* di Euclide rappresentano una prima elaborazione dettagliata dei principi della geometria noti a quel tempo. Anche in questa opera il concetto di punto è ancora di fondamentale importanza, tuttavia il rifiuto dell'infinito attuale non consentiva di indentificare le figure geometriche come l'insieme di punti in esse giacenti. Questo però non entrava in contrasto con l'idea secondo cui preso un segmento, per ogni intero n è possibile individuare n punti in esso giacenti, da ciò segue che i punti devono necessariamente avere grandezza nulla: indicando con d la grandezza di tali punti, supponendo per assurdo che $d \neq 0$, allora il segmento dovrebbe avere lunghezza maggiore di $n \cdot d$ per ogni intero n. Questa proprietà del punto ha comportato una completa idealizzazione degli enti geometrici: niente nel mondo reale può essere punto, essendo ogni cosa nel mondo reale dotata di lunghezza, larghezza e spessore.

Una critica all'idea di punto formulata dai greci è stata espressa da Sesto Empirico nell'opera "*Contro i geometri*". Secondo i greci le linee erano prodotte da uno scorrimento di un punto, ed erano enti geometrici privi di larghezza ma dotate di una lunghezza. Sesto nella sua opera pone il problema di come un ente privo di dimensione, quale è il punto, possa generare un ente che invece è dotato di una dimensione, quale è la linea. Un'altra attenta critica non riguarda gli enti in sé ma il processo di astrazione che porta alla loro costruzione. Secondo Sesto ogni cosa può essere concepita o mediante l'esperienza o attraverso un processo di immaginazione-astrazione, se quindi si accetta l'idea di linea come ente privo di larghezza è evidente che non è possibile avere un'esperienza diretta di una linea così definita. Ciò significa che l'unica cosa possibile è quella di utilizzare un procedimento di immaginazione-astrazione. Non potendo derivare il concetto di linea senza lunghezza da nessun'altro esistente, si potrebbe pensare di utilizzare un procedimento di diminuzione che consente di ridurre a piacere la larghezza di una linea. Questo però non consentirebbe di non considerare del tutto la larghezza (ciò comporterebbe un'accettazione dell'infinito attuale) e pertanto non è possibile raggiungere il tipo di astrazione richiesta. Un diverso processo di astrazione, che è possibile utilizzare, è quello che consente di definire un'idea astratta eliminando alcune proprietà dell'oggetto di partenza: il concetto di linea senza larghezza si potrebbe ottenere non considerando la larghezza di un qualsiasi oggetto reale. Tuttavia, come precisa lo stesso Sesto, questo procedimento potrebbe portare all'eliminazione di alcune proprietà fondamentali o al contraddire la concezione che si ha di qualcosa nel mondo reale: "Onde anche la lunghezza concepita come priva di larghezza non potrebbe essere una lunghezza giacche la lunghezza [...] viene concepita come avente una certa quantità di larghezza".

Tutte queste problematiche che ruotano attorno al concetto di punto hanno portato alla nascita dell'idea di fondare la geometria senza considerare i punti come oggetti primitivi. Un primo tentativo è stato effettuato la Lobacevskij che tentò di fondare la geometria sul concetto di corpo solido, vedendo i punti, linee e superfici come tipologia di contatti tra i corpi, tuttavia senza ottenere risultati interessanti. Più tardi il filosofo matematico A.N. Whitehead iniziò un'indagine di tipo epistemologico-filosofica su come definire il concetto di punto a partire dal concetto di regione. Anche se quanto discusso da Whitehead non si può considerare per una formulazione rigorosa di assiomi e definizioni, tuttavia la sua indagine ha messo in luce interessanti caratteristiche che hanno consentito una sistemazione assiomatica per una fondazione della geometria senza punti.

2.2 Strutture di inclusione e di connessione

Alla base del discorso di Whitehead ci sono strutture del tipo (M, K), dove M è un insieme non vuoto e K una relazione d'ordine definita in M. Nelle opere *An Inquiry Concerning the Principle of Natural Knowledge* e *The Concept of Nature* ([11],[12]), Whitehead assume come primitive le nozioni di *regione* e di *inclusione tra regioni*, dove per *inclusione*, non si intende l'inclusione in senso insiemistico, ma una relazione d'ordine definita nell'insieme delle regioni, legata al concetto intuitivo di *contenere*. Denotando con $\leq$ tale relazione e con $\mathcal{R}$ l'insieme delle regioni, è possibile dare la seguente definizione.

Definizione 2.1. Si definisce *struttura di inclusione* ogni struttura $(\mathcal{R}, \leq)$ che verifichi i seguenti assiomi:

$\boldsymbol{C_1}$ $\leq$ è $una\ relazione\ d'ordine$

$\boldsymbol{C_2}$ $\forall z \exists x \exists y (x < z < y))$

$\boldsymbol{C_3}$ $\forall x \forall y (x < y \Rightarrow \exists z (x < z < y))$

$\boldsymbol{C_4}$ $\forall x \forall y \exists z (x \leq z \wedge y \leq z)$

$\boldsymbol{C_5}$ $\forall x \forall y (\forall x' (x' < x \Rightarrow x' < y) \Rightarrow x \leq y)$

Tuttavia la nozione di *inclusione* appena data non è completamente adatta a dare la definizione di *punto*, come sarà mostrato in seguito.

Di fatti Whitehead nell'opera *Process and Reality* ([13]) alla relazione di inclusione sostituisce quella di *connessione tra regioni*, di carattere topologico piuttosto che insiemistico, ossia la relazione che sussiste tra due regioni che si sovrappongono o si toccano in un punto (Figura 2.1).

Figura 2.1. Regioni dello spazio connesse per sovrapposizione e contatto in un punto.

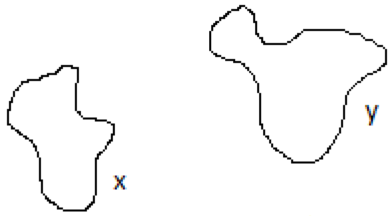


Figura 2.2. Regioni dello spazio non connesse.

Definizione 2.2. Sia C la relazione di connessione tra regioni allora è possibile definire con:

$$C(x) = \{y \in \mathcal{R} \mid xCy\}$$

$l'insieme\ di\ tutte\ le\ regioni\ connesse\ a\ x.$

Con questo secondo approccio la relazione di inclusione tra le regioni non è primitiva ed è possibile definirla nel modo seguente.

Definizione 2.3. Siano x e y regioni, x è contenuta in y se $C(x) \subseteq C(y)$. Denotando tale relazione con $\leq$:

$$x \leq y \Leftrightarrow x \text{ è } contenuta\ in\ y \Leftrightarrow C(x) \subseteq C(y)$$

La relazione $\leq$ appena definita è una relazione di pre-ordine.

Definizione 2.4. Si dice $struttura\ di\ connessione$ una struttura $(\mathcal{R}, C)$ che verifichi il seguente sistema di assiomi:

$\boldsymbol{F_1}$ $\forall x \forall y (xCy \rightarrow yCx)$

$\boldsymbol{F_2}$ $\forall x (xCx)$

$\boldsymbol{F_3}$ $\forall x \forall y \exists z (xCz \wedge yCz)$

$\boldsymbol{F_4}$ $\forall x \forall y (C(x) = C(y) \rightarrow x = y)$

$\boldsymbol{F_5}$ $\neg(\forall x \exists z (x \leq z))$

$\boldsymbol{F_6}$ $\forall z \exists x \exists y ((x \leq z \wedge y \leq z) \wedge \neg(xCy))$

Osservazioni. L'assioma $\boldsymbol{F_5}$ mostra che l'intero spazio non viene considerato come regione, pertanto saranno considerate solo le regioni limitate. L'assioma $\boldsymbol{F_4}$ assicura la proprietà di anti-simmetria della relazione $\leq$. Mentre l'assioma $\boldsymbol{F_6}$ implica che ogni regione contiene propriamente altre regioni, cioè non esistono atomi-punto.

Definizione 2.5. Siano x e y regioni, tali regioni si dicono $sovrapposte$ se esiste una regione z contenuta sia in x che in y. Denotando con O la relazione di sovrapposizione:

$$x \text{ è } sovrapposta\ a\ y \ \Leftrightarrow xOy \Leftrightarrow \exists z \in \ \mathcal{R}: z \leq x\ e\ z \leq y$$

Definizione 2.6. Sia S la relazione di sovrapposizione tra regioni, è possibile definire con

$$O(x) = \{y \in \mathcal{R} \mid xOy\}$$

l'insieme di tutte le regioni sovrapposte a x.

Osservazione. Siano C e S le relazioni di connessione e sovrapposizione tra regioni. Per ogni x, y regioni in $\mathcal{R}$ vale la seguente implicazione:

$$xOy \Rightarrow xCy$$

L'implicazione inversa non è sempre verificata: la relazione di connessione, di carattere topologico, non coincide in generale con la relazione di sovrapposizione, legata alla nozione di ordinamento.

2.3 Processi di astrazione: definizione degli enti geometrici

Per potere definire la nozione di punto, Whitehead utilizza il *processo di astrazione* inteso come quel processo di costruzione di nuovi enti a partire da classi di oggetti precedentemente definiti, che consente una approssimazione-costruzione sempre migliore di un ente "ideale". L'idea alla base è che un qualsiasi ente geometrico (es. un punto, un segmento, una superficie) sia il "limite" di una successione di regioni che vanno via via a "rimpicciolirsi" (ad esempio per una linea si può pensare a una successione di regioni sempre meno spesse).

Definizione 2.7. Dato uno spazio di inclusione $(\mathcal{R}, \leq)$, si definisce *processo di astrazione* una successione $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ di regioni tale che:

(i) $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ è strettamente decrescente;

(ii) non esiste una regione contenuta in tutte le regioni di $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Sia $\mathbb{PA}$ l'insieme dei *processi di astrazione*, il passo successivo è quello di definire quali sono i processi di astrazione che conducono allo stesso ente. Occorre quindi definire una relazione di equivalenza tra processi di astrazione.

Definizione 2.8. Siano $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ e $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ processi di astrazione in $\mathbb{PA}$. Il processo $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *copre* il processo $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ se e solo se per ogni regione s_i esiste una regione r_i contenuta in s_i. Indicando la relazione di copertura con ≤ allora:

$$(r_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ copre } (s_n)_{n\in\mathbb{N}} \Leftrightarrow (s_n)_{n\in\mathbb{N}} \leq (r_n)_{n\in\mathbb{N}}$$

La relazione appena definita è una relazione di pre-ordine in $\mathbb{PA}$.

Definizione 2.9. In $(\mathbb{PA}, \leq)$ si consideri la relazione ≡ definita nel modo seguente:

$$(s_n)_{n\in\mathbb{N}} \equiv (r_n)_{n\in\mathbb{N}} \Leftrightarrow (s_n)_{n\in\mathbb{N}} \leq (r_n)_{n\in\mathbb{N}} \; e (r_n)_{n\in\mathbb{N}} \leq (s_n)_{n\in\mathbb{N}}$$

La relazione appena definita è una relazione di equivalenza tra processi di astrazione, pertanto è possibile quozientare l'insieme $\mathbb{PA}$, definendo:

$$\mathbb{EG} = {}^{\mathbb{PA}}\!/_{\equiv}$$

In $\mathbb{EG}$ si definisce la relazione ≤ tra classi di equivalenza nel modo seguente:

$$[(r_n)_{n\in\mathbb{N}}] \leq [(s_n)_{n\in\mathbb{N}}] \Leftrightarrow (r_n)_{n\in\mathbb{N}} \leq (s_n)_{n\in\mathbb{N}}$$

La relazione ≤ è d'ordine e pertanto $(\mathbb{EG}, \leq)$ è un insieme ordinato.

Definizione 2.10. Si definisce *elemento geometrico* ogni elemento di $\mathbb{EG}$ cioè ogni classe completa di equivalenza di processi di astrazione. Si definisce *inclusione* la relazione d'ordine definita in $\mathbb{EG}$.

In accordo con la definizione data da Euclide di punto come “ciò che non ha parti”, è possibile dare la seguente definizione.

Definizione 2.11. Si definisce *punto* un elemento geometrico che non include propriamente nessun altro elemento geometrico.

Osservazione. Si noti che un punto non deve essere considerato come il risultato di un processo continuo di approssimazione ma come il processo di approssimazione stesso. In tal modo, l’infinito attuale non viene coinvolto in quanto il processo non deve essere necessariamente immaginato come terminato.

Tuttavia definire gli enti geometrici basandosi esclusivamente sul concetto di *inclusione* non è completamente soddisfacente. Ad esempio, supponendo di restringere il discorso al piano euclideo, prendiamo in considerazione tre distinte classi astrattive $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ e $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ costituite, rispettivamente, dai cerchi di centro $(-{}^{1}\!/_{n}, 0)$ e raggio ${}^{1}\!/_{n}$, dai cerchi di centro $({}^{1}\!/_{n}, 0)$ e raggio ${}^{1}\!/_{n}$ e dai cerchi di centro $(0, 0)$ e raggio ${}^{1}\!/_{n}$ (Figura 2.3): si ha che $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ e $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ non si coprono tra loro. Siano 0^- e 0^+ gli enti geometrici corrispondenti alle due classi e sia 0 l’ente geometrico corrispondente alla successione $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$, allora vengono definiti tre distinti enti geometrici con 0 contenente propriamente 0^+ e 0^-. Pertanto 0 non rispetterebbe la definizione di punto appena data.

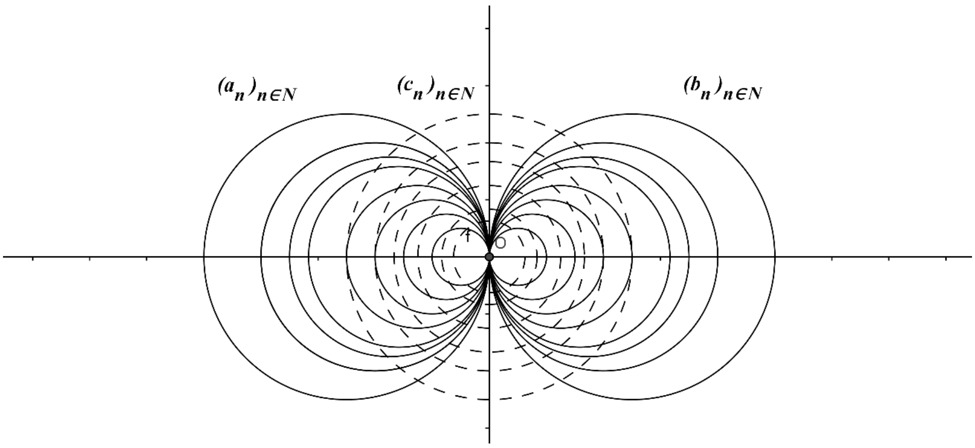


Figura 2.3. Rappresentazione, nel piano euclideo, delle classi astrattive costituite dai cerchi di centro $(-{}^{1}/_{n}, 0)$ e raggio ${}^{1}/_{n}$ ($(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$), dai cerchi di centro $({}^{1}/_{n}, 0)$ e raggio ${}^{1}/_{n}$ ($(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$), dai cerchi di centro $(0, 0)$ e raggio ${}^{1}/_{n}$ ($(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$).

Osservazione. Mediante questa situazione presa in analisi si potrebbe anche rendere rigoroso l'utilizzo della simbologia 0^+ e 0^-. Inoltre è possibile definire uno spazio in cui i punti classici si vanno a spazzare in più punti, come è anche possibile definire nuovi punti ammettendo come regioni anche intervalli non limitati superiormente e intervalli non limitati. In tal caso si ottengono come punti anche $-\infty$ e $+\infty$.

Tuttavia tale problematica non sussiste se si passa a lavorare all'interno di strutture di connessione. Per poter dare la definizione di processo di astrazione all'interno di strutture del tipo $(\mathcal{R}, C)$ occorre dare la definizione di *inclusione non tangenziale*.

Definizione 2.12. Si consideri una struttura di connessione $(\mathcal{R}, C)$. Si definisce *inclusione non tangenziale* la relazione indicata con $\ll$ e definita nel modo seguente:

$$x \ll y \Leftrightarrow C(x) \subseteq O(y)$$

In sostanza se $x \ll y$ allora ogni regione z non può connettersi a x senza sovrapporsi a y. Nella Figura 2.4 e nella Figura 2.5 sono riportati esempi di inclusione non tangenziale tra regioni e di inclusione tangenziale tra regioni.

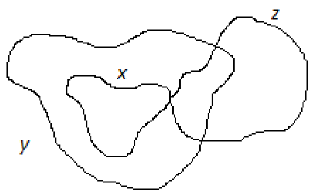


Figura 2.4. Inclusione non tangenziale tra le regioni *x* e *y*.

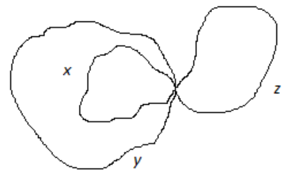


Figura 2.5. Inclusione tangenziale tra due regioni *x* e *y*.

Attraverso questa definizione è possibile dare una definizione maggiormente adatta di processo di astrazione.

Definizione 2.13. Un processo di astrazione della struttura $(\mathcal{R}, C)$ si definisce come una successione $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ di regioni tale che:

(i) $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$è decrescente rispetto a $\ll$

(ii) non esiste una regione contenuta in tutte le regioni di $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Le nozioni di ente geometrico e di punto sono esattamente analoghe a quelle date in precedenza per le strutture di inclusione. Tuttavia, se si va a considerare l'esempio mostrato in precedenza relativo alle tre classi astratte $0^+ = [(b_n)_{n\in\mathbb{N}}]$, $0^- = [(a_n)_{n\in\mathbb{N}}]$, e $0 = [(c_n)_{n\in\mathbb{N}}]$, si ha che non sussiste alcun problema in quanto per le successioni $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ e $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ le regioni che le compongono non sono processi di astrazione secondo $\ll$, cioè sono costituite da regioni che sono tra loro incluse tangenzialmente.

Per poter passare ad un livello più propriamente geometrico, a partire dalla nozione di connessione di carattere topologico, è necessario introdurre la nozione di *segmento*. A tal scopo, in linea con quanto illustrato dallo stesso Whitehead, si fa riferimento ad una particolare classe di regioni: gli *ovali*. Tale tipologia di regioni sembra essere molto vicina all'idea intuitiva di regione dello spazio in cui non sono presenti "incavi"; da un punto di vista geometrico gli ovali sembrano corrispondere alle regioni convesse dello spazio euclideo: una regione dello spazio euclideo si definisce convessa se e solo se, per ogni coppia di punti, il segmento che li congiunge è interamente contenuto in essa.

Nel definire quindi la nozione di segmento, si vanno a considerare strutture del tipo $(\mathcal{R},\ C,\ \mathcal{O}v)$ dove $\mathcal{O}v$ è appunto la classe di quelle regioni chiamate *ovali*.

Definizione 2.14. Si consideri una struttura del tipo $(\mathcal{R},\ C,\ \mathcal{O}v)$. Dati due punti P e Q si definisce *segmento di estremi P e Q* l'ente geometrico:

- *(i)* contenente P e Q
- *(ii)* rappresentabile attraverso un processo di astrazione costituito da *ovali*
- *(iii)* minimale rispetto alle condizioni precedenti

Una volta definito il concetto di segmento è possibile passare alla definizione di un qualsiasi altro ente geometrico.

2.4 Modelli per la geometria senza punti

È di fondamentale importanza la ricerca di modelli matematici per le strutture di inclusione e di connessione. Tale ricerca può essere effettuata all'interno dell'usuale geometria euclidea: partendo dallo spazio euclideo tridimensionale si vanno a ricercare gli enti dell'usuale geometria più adatti a ricoprire il ruolo di "regioni dello spazio". I *chiusi regolari* sono sottoinsiemi dello spazio metrico euclideo che si prestano bene allo scopo.

Indicando con $\mathbb{RC}$ la classe dei *chiusi* dello spazio euclideo e con $\mathbb{R}\mathbb{e}$ la sottoclasse dei *chiusi regolari*, per lo scopo prefissato si prescinderà dalla *frontiera* nel definire la nozione di regione. Si andranno ad indentificare due sottoinsiemi di punti che differiscono unicamente per i punti di frontiera. Per far ciò è opportuno ricordare che *si definisce chiuso regolare ogni insieme che è coincidente con la chiusura del suo intero,* dove la chiusura è rappresentata dall'operatore c e l'interno dall'operatore i. Quindi è possibile definire una relazione di equivalenza tra sottoinsiemi dello spazio euclideo.

Definizione 2.15. Siano X e Y sottoinsiemi dello spazio euclideo. $X \; e \; Y$ si dicono *equivalenti* se $c\big(i(X)\big) = c\big(i(Y)\big)$.

Poiché l'operatore dato dalla composizione di $i \; e \; c$ è idempotente, si ha che ogni insieme X è $equivalente \; a \; c\big(i(X)\big)$. Allora in ogni classe di equivalenza esiste uno ed un solo chiuso regolare. Ciò significa che sussiste una corrispondenza biunivoca tra la classe dei chiusi regolari e le classi di equivalenza appena definite.

Definizione 2.16. Si definisce *regione* ogni classe completa di equivalenza oppure, equivalentemente, ogni *chiuso regolare* dello spazio euclideo.

È importante notare che la classe degli insiemi chiusi regolari dello spazio euclideo è un'*algebra di Boole senza atomi*.

Osservazione. Equivalentemente si può considerare la classe degli aperti regolari dello spazio euclideo, ossia la classe di quei sottoinsiemi che risultato essere equivalenti all'interno della loro chiusura.

Volendo procedere più in generale è possibile riferirsi ad un qualsiasi spazio topologico.

Definizione 2.17. Uno *spazio di inclusione* $(\mathcal{R}, \leq)$ si dice *modello canonico* se $\mathcal{R}$ è un insieme di *chiusi regolari limitati e non vuoti* di uno spazio topologico e $\leq$ è la relazione di inclusione definita in $\mathcal{R}$.

Definizione 2.18. Uno *spazio di connessione* $(\mathcal{R}, C)$ si dice *modello canonico* se $\mathcal{R}$ è un insieme di *chiusi regolari limitati e non vuoti* di uno spazio topologico e C è una relazione binaria in $\mathcal{R}$ definita ponendo:

$$XCY \;\Leftrightarrow c(X) \cap c(Y) \neq 0$$

Osservazione. Si osservi che nel modello canonico definito dagli aperti regolari (non necessariamente limitati) le nozioni di punto e di figura geometrica non coincidono con le nozioni usuali della geometria euclidea ma esistono anche enti geometrici "all'infinito". Se ad esempio si va a considerare la successione $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dei semipiani

$r_n = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > n\}$, si ha che tale processo di astrazione rappresenta un ente geometrico che non ha punti al finito.

Osservazione. È importante tener presente che volendo dare la definizione di modello canonico di uno spazio affine senza punti, non ci si può più riferire agli spazi topologici ma bisogna fare riferimenti a spazi in cui è possibile dare la nozione di convessità, altrimenti non sarebbe possibile parlare di segmenti, per come sono stati definiti in precedenza.

Definizione 2.19. Si dice canonico un modello di spazio affine senza punti $(\mathcal{R}, \leq, \mathcal{O}v)$ dove $(R, \leq)$ è un modello canonico di struttura di inclusione definito in uno spazio euclideo ed $\mathcal{O}v$ è la classe degli elementi convessi di $\mathcal{R}$.

Definizione 2.20. Si dice canonico un modello di spazio affine senza punti $(\mathcal{R}, C, \mathcal{O}v)$ dove (R, C) è un modello canonico di struttura di connessione definito in uno spazio euclideo ed $\mathcal{O}v$ è la classe degli elementi convessi di $\mathcal{R}$.

Capitolo 3

L’approccio metrico alla geometria senza punti

Nel capitolo precedente, a partire da una struttura di inclusione $(\mathcal{R}, \leq)$ si è passati alla definizione della classe degli *elementi geometrici* $\mathbb{EG}$, attraverso la nozione di *processo di astrazione*. All’interno di tale classe sono stati definiti come *punti* tutti gli elementi geometrici che non includevano propriamente nessun altro elemento geometrico, in linea con la definizione euclidea. Lo scopo del capitolo seguente è quello di dare struttura di *spazio metrico* all’insieme dei punti. Per far ciò verranno trattati alcuni approcci metrici alla geometria senza punti (si veda [2]), introducendo le nozioni di distanza tra regioni e diametro di regioni. In particolare, saranno illustrati tre approcci possibili, che differiscono unicamente per le nozioni primitive considerate, che consentiranno di definire una *metrica* all’interno dell’insieme dei punti.

3.1 Distanza e diametri di regioni

Riferendosi all’insieme delle regioni $\mathcal{R}$, per poter definire una distanza δ tra esse è necessario considerare tali regioni come sottoinsiemi di uno spazio metrico. Ciò quindi consente di fare riferimento alla nozione usuale di distanza tra insiemi all’interno di uno spazio metrico.

Definizione 3.1. Siano X e Y regioni, si indica con $\delta(X,Y)$ la distanza tra X e Y, definita ponendo:

$$\delta(X,Y) = \inf\{d(x,y) : x \in X, y \in Y\}$$

dove d è la metrica definita nello spazio a cui *X e Y* appartengono.

È chiaro che δ non è una metrica in quanto $\delta(X,Y) = 0$ non implica $X = Y$: se ad esempio si vanno a considerare *X e Y* insiemi uno incluso nell’altro e distinti tra loro, è chiaro che l'implicazione non è verificata. Tuttavia δ non è neanche una pseudo-metrica non essendo verificata la disuguaglianza triangolare. Basta osservare la situazione riportata nella figura seguente (Figura 3.1).

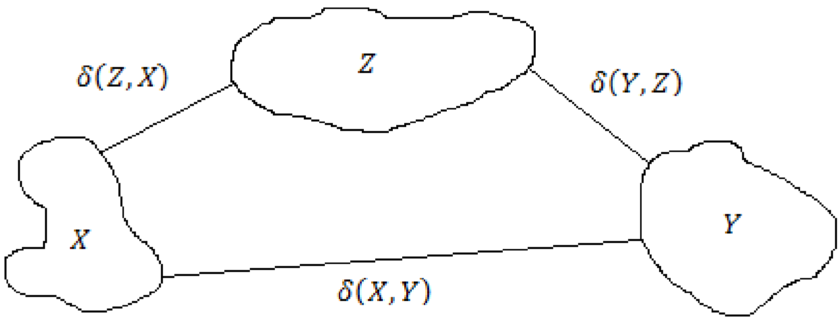


Figura 3.1. Situazione grafica in cui la disuguaglianza triangolare non è verificata dalla distanza δ tra regioni.

in cui è evidente che $\delta(X,Y) > \delta(Y,Z) + \delta(Z,X)$.

Questo suggerisce che la nozione di distanza tra regioni, non basta se si vuole definire uno spazio metrico. Tuttavia, intuitivamente, se si vanno a considerare regioni "molto piccole" si ha che δ va a verificare almeno in maniera approssimativa le proprietà di una metrica.

È quindi necessario introdurre la nozione di diametro di una regione, capace di tener conto del concetto di regione "molto piccola", definito facendo ancora riferimento alla nozione di diametro di un sottoinsieme di uno spazio metrico.

Definizione 3.2. Sia X una regione, si indica con $|X|$ il diametro di X, definito ponendo:

$$|X| = \sup\{\, d(x,y) | x \in X, y \in X\}$$

Come sarà mostrato nel paragrafo successivo tramite tale definizione sarà possibile introdurre una disuguaglianza che andrà a giocare il ruolo di disuguaglianza triangolare.

3.2 Approccio metrico basato sul concetto di diametro e di distanza

Il primo esempio di approccio metrico proposto è basato sulle nozioni primitive di *regione, inclusione, distanza e diametro.* Il *modello prototipico* è definito nella classe $\mathbb{R}\mathrm{e}$, definita nel capitolo precedente come la classe dei *chiusi regolari e limitati* dello spazio euclideo, dove le due funzioni di *distanza e diametro*, rispettivamente $\delta\colon \mathbb{R}\mathrm{e}\times\mathbb{R}\mathrm{e} \to [0,\infty)$ e $|\cdot|\colon \mathbb{R}\mathrm{e} \to [0,\infty)$, sono definite ponendo $\forall\, x, y \in \mathbb{R}\mathrm{e}$:

$$\delta(x,y) \coloneqq \inf\{d(A,B)\colon A \in x, B \in y\}$$

$$|x| \coloneqq \sup\{d(A,B)\colon A, B \in x\}$$

dove *d* è la metrica definita nello spazio euclideo in cui la classe $\mathbb{R}\mathrm{e}$ è immersa.

Osservazione. È immediato osservare che l'applicazione δ è order-reversing mentre l'applicazione $|\cdot|$ è order-preserving.

La funzione distanza δ verifica banalmente le proprietà:

- $\delta(x,x) = 0$
- $\delta(x,y) = \delta(y,x)$

Una proprietà più interessante è mostrata dalla seguente proposizione.

Proposizione 3.1. Siano $x, y, z \in \mathbb{R}\mathrm{e}$ allora è verificata la seguente disuguaglianza

$$\delta(x,y) \leq \delta(x,z) + \delta(z,y) + |z|$$

detta *disuguaglianza triangolare generalizzata.*

<u>*Dim.*</u> Non è restrittivo assumere che gli insiemi $x, y\ e\ z$ siano chiusi e che quindi esistano i punti $A, B, C, D, E, F, G\ E\ H$ tali che:

$$\overline{AB} = \delta(x,y), \qquad \overline{CD} = \delta(y,z), \qquad \overline{EF} = \delta(z,x), \qquad |z| = \overline{GH}$$

come mostrato nella figura successiva (Figura 3.2.).

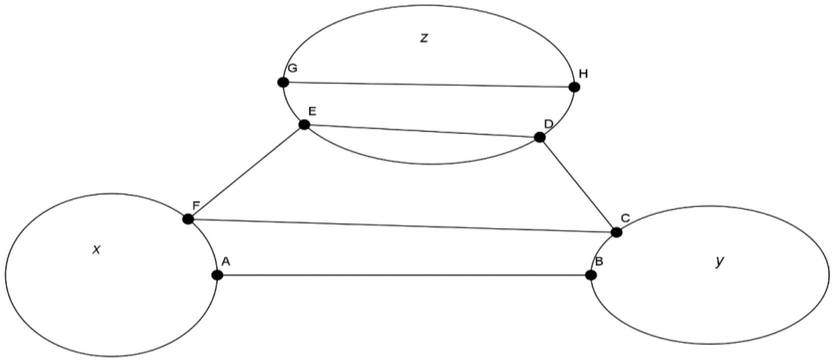


Figura 3.2. Rappresentazione grafica che mostra la validità della *disuguaglianza triangolare generalizzata*.

Si ha che:

$$\delta(x,y) = \overline{AB} \leq \overline{FE} + \overline{ED} + \overline{DC} \leq \overline{FE} + \overline{GH} + \overline{DC} = \delta(y,z) + \delta(z,x) + |z|$$

$$\Rightarrow \delta(x,y) \leq \ \delta(y,z) + \delta(z,x) + |z|$$

□

Inoltre, tenendo conto delle proprietà che caratterizzano gli insiemi regolari di uno spazio metrico, si ha che:

$$\forall x \forall n \exists z \left(z \leq x \wedge |z| \leq \frac{1}{n} \right)$$

Quanto detto fin ora per la *struttura prototipica* suggerisce la seguente definizione.

Definizione 3.3. Uno *spazio pseudo-metrico senza punti*, brevemente *ppm-spazio*, è una struttura del tipo $(\mathcal{R}, \leq, \delta, |\cdot|)$, tale che $(\mathcal{R}, \leq)$ è un insieme ordinato, le applicazioni $\delta: \mathcal{R} \times \mathcal{R} \rightarrow [0, \infty)$ e $|\cdot|: \mathcal{R} \rightarrow [0, \infty)$ sono rispettivamente *order-reversing* e *order-preserving,* e per ogni $x, y, z \in \mathcal{R}$ sono soddisfatti i seguenti assiomi:

$\boldsymbol{ppm_1}$ $\delta(x,x) = 0$

$\boldsymbol{ppm_2}$ $\delta(x,y) = \delta(y,x)$

$\boldsymbol{ppm_3}$ $\delta(x, y) \leq \delta(y, z) + \delta(z, x) + |z|$

$\boldsymbol{ppm_4}$ $(\forall n \in \mathbb{N})(\exists z \leq x)\ |z| \leq \frac{1}{n}$

Gli elementi di $\mathcal{R}$ sono dette regioni; la relazione $\leq$ è la *relazione di inclusione*; il valore $\delta(x, y)$ indica la *distanza tra due regioni x e y*; il numero $|x|$ rappresenta il *diametro di una regione x*. Se la regione x è limitata allora il diametro $|x|$ è finito.

Tenendo conto di tale definizione è chiaro che il *modello prototipico* proposto precedentemente è un *ppm-spazio.*

Definizione 3.4. Si dice *canonico* un *ppm-spazio* in cui $\mathcal{R}$ è pari alla classe dei chiusi regolari e limitati di uno spazio metrico.

Proposizione 3.2. Sia $(\mathcal{R}, \leq, \delta, |\cdot|)$ un *ppm-spazio*. Per ogni $x, y \in \mathcal{R}$, se esiste $z \in \mathcal{R}$ tale che $z \leq x$ e $z \leq y$ allora $\delta(x, y) = 0$. Di conseguenza, se esistesse un minimo in $\mathcal{R}$ ciò significherebbe che δ dovrebbe essere *costantemente pari* a 0.

Dim. Per ipotesi si ha che $z \leq x$ e $z \leq y$. Allora essendo δ *order-reversing*, per l'assioma ppm1 si ha che:

$$\delta(z, x) \leq \delta(z, z) = 0 \Rightarrow \delta(z, x) = 0$$

e

$$\delta(z, y) \leq \delta(z, z) = 0 \Rightarrow \delta(z, y) = 0$$

Utilizzando la disuguaglianza triangolare generalizzata (ppm3) e i risultati appena ricavati si ha che:

$$\delta(x, y) \leq \delta(z, y) + \delta(z, x) + |z| \Rightarrow \delta(x, y) = |z|$$

Tenendo conto dell'assioma ppm4, ciò comporta che:

$$\delta(x, y) = 0$$

□

Osservazione. Per quanto appena visto nella proposizione precedente, si assume che in $\mathcal{R}$ non esista minimo.

Come è stato illustrato nel capitolo precedente, all'interno delle *strutture di inclusione e di connessione* è stata definita la sottoclasse $\mathbb{PA}$ dei processi di astrazione, dalla quale si è costruita la classe $\mathbb{EG}$ degli enti geometrici tramite un opportuno quoziente rispetto ad una relazione di equivalenza (indotta dalla relazione di pre-ordine di *copertura*) tra processi di astrazione, per arrivare in fine a dare la definizione di punto. È possibile procedere ugualmente anche all'interno dei *ppm-spazi* arrivando ad una "costruzione-definizione" dei punti che va a riprendere il concetto di processo di astrazione.

Definizione 3.5. Sia $(\mathcal{R}, \leq, \delta, |\cdot|)$ un ppm-spazio, sia $\langle x_n \rangle_{n\in\mathbb{N}}$ una successione decrescente di regioni tale che:

$$\lim_{n\to\infty} |x_n| = 0$$

Allora tale successione è detta *un rappresentante di un punto*.

Osservazione. Per alleggerire la notazione quello appena definito come *un rappresentante di un punto* verrà nuovamente chiamato *processo di astrazione in un ppm-spazio.*

Sia $\mathbb{PA}^*$ *la classe dei processi di astrazione in un ppm-spazio* (o classe dei rappresentati di punti in un ppm-spazio). Sfruttando la nozione di distanza tra regioni, precedentemente definita, è possibile formulare la seguente definizione di distanza tra rappresentanti.

Definizione 3.6. Per ogni $\langle x_n \rangle_{n\in\mathbb{N}}$ e $\langle y_n \rangle_{n\in\mathbb{N}}$ in $\mathbb{PA}^*$, l'applicazione

$$d\colon \mathbb{PA}^* \times \mathbb{PA}^* \to [0, \infty)$$

definita ponendo:

$$d(\langle x_n \rangle_{n\in\mathbb{N}}, \langle y_n \rangle_{n\in\mathbb{N}}) = \lim_{n\to\infty} \delta(x_n, y_n) \qquad (*)$$

dove δ è la distanza tra regioni definita precedentemente, si dice *distanza tra processi di astrazione in un ppm-spazio o equivalentemente distanza tra rappresentanti di punti.*

Teorema 3.1. *La struttura* $(\mathbb{PA}^*, d)$ *è uno spazio pseudo-metrico.*

Dim. Prima di dimostrare che d è una pseudo-metrica, bisogna verificare che $\mathbb{PA}^*$ sia non vuoto e provare che la definizione di d sia ben posta.

L'assioma ***ppm4*** consente di definire, per ogni regione *x*, un processo di astrazione $\langle p_n \rangle_{n\in\mathbb{N}}$ tale che: $p_1 = x$ e p_n sia uguale a una qualche regione contenuta in p_{n-1} e $|p_n| \leq {}^1/_n$. Pertanto $\mathbb{PA}^*$ è non vuoto.

L'esistenza del limite $(*)$ è assicurata dal fatto che la successione $\big(\delta(p_n, q_n)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ è *order-preserving,* ed inoltre si ha che è verificata la seguente catena di disuguaglianze, ottenuta applicando due volte l'assioma ***ppm3*** (*disuguaglianza triangolare generalizzata*) e tenendo conto del fatto che la distanza tra regioni che costituiscono il medesimo processo di astrazione è nulla:

$$\delta(p_n, q_n) \leq \delta(p_n, p_1) + \delta(p_1, q_n) + |p_1|$$

$$\leq \delta(p_n, p_1) + \delta(p_1, q_1) + \delta(q_1, q_n) + |p_1| + |q_1|$$

$$= \delta(p_1, q_1) + |p_1| + |q_1|$$

Quindi la definizione della distanza d in $\mathbb{PA}^*$ è ben posta.

Rimangono quindi da dimostrare le tre proprietà che caratterizzano una *pseudo-metrica:*

(i) $d(\langle p_n \rangle_{n\in\mathbb{N}}, \langle p_n \rangle_{n\in\mathbb{N}}) = 0$

(ii) $d(\langle p_n \rangle_{n\in\mathbb{N}}, \langle q_n \rangle_{n\in\mathbb{N}}) = d(\langle q_n \rangle_{n\in\mathbb{N}}, \langle p_n \rangle_{n\in\mathbb{N}})$

(iii) $d(\langle p_n \rangle_{n\in\mathbb{N}}, \langle q_n \rangle_{n\in\mathbb{N}}) \leq d(\langle p_n \rangle_{n\in\mathbb{N}}, \langle r_n \rangle_{n\in\mathbb{N}}) + d(\langle r_n \rangle_{n\in\mathbb{N}}, \langle p_n \rangle_{n\in\mathbb{N}})$

Le proprietà *(i)* e *(ii)* sono ovviamente verificate essendo soddisfatte dalla distanza tra regioni δ, definita nei ppm-spazi. Quindi rimane da dimostrare che l'applicazione *d* verifichi la proprietà *(iii)*. Siano $\langle p_n \rangle_{n\in\mathbb{N}}$, $\langle q_n \rangle_{n\in\mathbb{N}}$ e $\langle r_n \rangle_{n\in\mathbb{N}}$ processi di astrazione, allora si ha che:

$$d(\langle p_n \rangle_{n\in\mathbb{N}}, \langle q_n \rangle_{n\in\mathbb{N}}) = \lim_{n\to\infty} \delta(p_n, q_n) \leq \lim_{n\to\infty} \delta(p_n, r_n) + \delta(r_n, q_n) + |r_n|$$

$$= \lim_{n\to\infty} \delta(p_n, r_n) + \lim_{n\to\infty} \delta(r_n, q_n) + \lim_{n\to\infty} |r_n|$$

$$= d(\langle p_n\rangle_{n\in\mathbb{N}}, \langle r_n\rangle_{n\in\mathbb{N}}) + d(\langle r_n\rangle_{n\in\mathbb{N}}, \langle q_n\rangle_{n\in\mathbb{N}})$$

$$\Rightarrow d(\langle p_n\rangle_{n\in\mathbb{N}}, \langle q_n\rangle_{n\in\mathbb{N}}) \leq d(\langle p_n\rangle_{n\in\mathbb{N}}, \langle r_n\rangle_{n\in\mathbb{N}}) + d(\langle r_n\rangle_{n\in\mathbb{N}}, \langle q_n\rangle_{n\in\mathbb{N}})$$

□

Per ottenere uno spazio metrico occorre quozientare $\mathbb{PA}^*$ rispetto alla relazione di equivalenza ≡ tra processi di astrazione in un ppm-spazio definita come segue:

$$\langle p_n\rangle_{n\in\mathbb{N}} \equiv \langle q_n\rangle_{n\in\mathbb{N}} \Leftrightarrow d(\langle p_n\rangle_{n\in\mathbb{N}}, \langle q_n\rangle_{n\in\mathbb{N}}) = 0$$

Sia $\mathbb{EG}^*$ il quoziente di $\mathbb{PA}^*$ rispetto alla relazione di equivalenza ≡, è possibile dare la seguente definizione.

Definizione 3.7. Per *spazio metrico associato a* $(\mathcal{R}, \leq, \delta, |\cdot|)$ si intende il quoziente $(\mathbb{EG}^*, \underline{d})$ di $(\mathbb{PA}^*, d)$. Si dicono *punti* gli elementi di $\mathbb{EG}^*$, pertanto un *punto* di $(\mathcal{R}, \leq, \delta, |\cdot|)$ è rappresentato da una classe completa di equivalenza $[\langle p_n\rangle_{n\in\mathbb{N}}]$. La distanza $\underline{d}$ tra due punti è definita ponendo:

$$\underline{d}([\langle p_n\rangle_{n\in\mathbb{N}}], [\langle q_n\rangle_{n\in\mathbb{N}}]) := \lim_{n\to\infty} \delta(p_n, q_n)$$

3.3 Approccio metrico basato sul concetto di diametro

Il secondo approccio metrico proposto si basa sulle nozioni primitive di *regione, inclusione e diametro*, attraverso le quali sarà possibile definire una opportuna distanza *d* tra regioni.

Per fare ciò occorre introdurre una relazione d'ordine tra regioni, rappresentata con il simbolo O, detta *relazione di sovrapposizione*.

Definizione 3.8. In $(\mathcal{R}, \leq)$, si definisce *relazione di sovrapposizione* la relazione d'ordine tra regioni definita ponendo: xOy se e solo se esiste una regione z, diversa da un eventuale minimo, tale che $z \leq x \; e \; z \leq y$.

Si diranno *sovrapposti* due elementi che sono in relazione rispetto ad O.

Introdotta la relazione di sovrapposizione nell'insieme delle regioni, si può passare alla seguente definizione.

Definizione 3.9. Si definisce *diametric poset* una struttura $(\mathcal{R}, \leq, |\cdot|)$ in cui $(\mathcal{R}, \leq)$ è una struttura di inclusione, quindi un insieme parzialmente ordinato senza minimo, e l'applicazione *diametro*

$$|\cdot|: \mathcal{R} \to [0, \infty)$$

è una funzione order-reversing tale che, per ogni *x e y* regioni:

$\boldsymbol{D_1}$ xOy *comporta l'esistenza di una regione r tale che*:

$$x \leq r, y \leq r \; e \; |r| \leq |x| + |y|$$

$\boldsymbol{D_2}$ *esiste una regione limitata z tale che zOx e zOy*

$\boldsymbol{D_3}$ *data x, per ogni* $n > 0$ *esiste* $z \leq x$ *tale che* $|z| \leq \dfrac{1}{n}$

La proprietà espressa in $\boldsymbol{D_1}$ può essere generalizzata a un numero finito di regioni.

Proposizione 3.3. Sia $(\mathcal{R}, \leq, |\cdot|)$ un *diametric poset* e siano $a_1, a_2, \ldots, a_n$ regioni tali che $a_1 O a_2, \ldots, a_{n-1} O a_n$, allora esiste una regione r tale che:

$$r \leq a_1, r \leq a_2, \ldots, r \leq a_n \; e \; |r| \leq |a_1| + |a_2| + \cdots + |a_n|$$

Dim. La proposizione si dimostra per induzione su n.

Per $n = 1$è sufficiente porre $r = a_1$.

Sia $n > 1$ e siano $a_1, a_2, \ldots, a_n$ tali che $a_1 O a_2, \ldots, a_{n-1} O a_n$, per ipotesi di induzione esiste una regione r_n tale che:

$$a_1 \leq r_n, a_2 \leq r_n, \ldots, a_{n-1} \leq r_n$$

e

$$|r_n| \leq |a_1| + |a_2| + \cdots + |a_{n-1}|$$

Essendo $a_{n-1} \leq r_n$e $a_{n-1}Oa_n$, si ha che r_nOa_n. Per la proprietà D_1 esiste una regione r tale che:

$$r_n \leq r, a_n \leq r\ e\ |r| \leq |r_n| + |a_n|$$

Allora si ha che:

$$|r| \leq |r_n| + |a_{n-1}| \leq |a_1| + |a_2| + \cdots + |a_{n-1}| + |a_n|$$

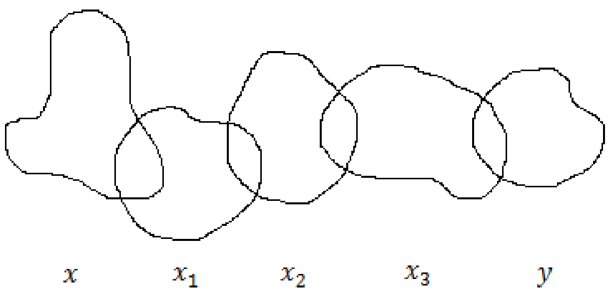
$$\Rightarrow\ |r| \leq |a_1| + |a_2| + \cdots + |a_n|$$

□

Prima di dare la nozione di *distanza* all'interno di un *diametric poset* è necessario introdurre la seguente definizione di *percorso tra regioni*.

Definizione 3.10. Siano x, y elementi di $(\mathcal{R}, \leq)$ e sia O la relazione di sovrapposizione, si dice *percorso tra x e y* una successione $x_1, x_2, \dots, x_n$ di elementi di $\mathcal{R}$ tale che: xOx_1, $x_iOx_{i+1}\ per\ i = 1, \dots, n-1$ ed x_nOy.

In figura è riportato un esempio di percorso tra due regioni.



Ora è possibile introdurre la nozione di *distanza minima tra regioni*. L'idea alla base è quella di 'misurare' la distanza tra due regioni servendosi di un 'ponte', costituito da una o più regioni, che le collega.

Definizione 3.11. Sia $(\mathcal{R}, \leq, |\cdot|)$ un *diametric poset*, si definisce *distanza minima tra due regioni x e y* l'applicazione

$$\delta: \mathcal{R}^2 \to [0, \infty)$$

definita ponendo:

$\delta(x, y) = inf\{|x_1| + |x_2| + \cdots + |x_n| : \ x_1, x_2, \dots, x_n$ è $un\ percorso\ tra\ x\ e\ y\}$

Oppure equivalentemente, considerando un'unica regione sovrapposta sia ad *x* che ad *y*:

$$\delta(x, y) \coloneqq inf\{|z|: zOx\ e\ zOy\}$$

Teorema 3.2. *Sia* $(\mathcal{R}, \leq, |\cdot|)$ *un diametric poset, la struttura* $(\mathcal{R}, \leq, \delta, |\cdot|)$ *è un ppm-spazio.*

Dim. Prima di dimostrare le quattro proprietà che definiscono i ppm-spazi si osservi che le applicazioni δ e $|\cdot|$ sono, rispettivamente, *order-reversing e order-preserving.* Inoltre l'applicazione δ assume valori finiti.

Per dimostrare la proprietà $\boldsymbol{ppm_1}$ si osservi che:

$$\delta(x, x) \leq \inf\{|z|: z \leq x\}$$

per ogni regione $x \in \mathcal{R}$. Quindi, applicando la proprietà $\boldsymbol{D_3}$ dei *diametric posets* si ha che: $\delta(x, x) = 0$.

La proprietà $\boldsymbol{ppm_2}$ è ovviamente verificata dalla distanza δ. Per provare la proprietà $\boldsymbol{ppm_3}$ occorre suddividere due casi:

1° $caso$. Siano $x, y, z \in \mathcal{R}$. Se il diametro di z è infinito la proprietà di disuguaglianza triangolare generalizzata (ppm_3) è banalmente verificata.

$2°\ caso$. Siano $x, y, z\ \in \mathcal{R}$. Sia $|z|$ finito e siano u, v regioni tali che:

$$uOx, uOz\ e\ vOz, vOy$$

Applicando la proprietà $\boldsymbol{D_1}$ dei diametric posets generalizzata si ha che

$$uOz\ e\ vOz\ \Rightarrow\ \exists r \in \mathcal{R}: r \geq u, r \geq v, r \geq z\ e\ |r| \leq |u| + |v| + |z|$$

Poiché $r \geq u,\ uOx, r \geq v$ e vOy allora: $rOx\ e\ rOy$. Quindi:

$$r \in \{z \in \mathcal{R}: zOx\ e\ zOy\}$$

Sia la distanza δ definita come

$$\delta(x, y) = inf\{|z|: zOx\ e\ zOy\}$$

da quanto appena osservato si evince che:

$$\delta(x, y) \leq |r| \leq |u| + |v| + |z|$$

$$\Rightarrow \delta(x, y) \leq \inf\{|u|: uOx, uOz\} + \inf\{|v|: vOz, vOy\} + |z|$$
$$= \delta(x, z) + \delta(z, y) + |z|$$

$$\Rightarrow\ \delta(x, y) \leq \delta(x, z) + \delta(z, y) + |z|$$

La proprietà $\boldsymbol{ppm_4}$ è ovviamente verificata. ◻

Osservazione. Quindi, è possibile associare ciascun *diametric poset* con uno spazio metrico: esattamente come è stato fatto nell'approccio precedente, a partire da un *ppm-spazio* è possibile andare a costruire $(\mathbb{PA}^*, \mathrm{d})$ e $(\mathbb{EG}^*, \underline{\mathrm{d}})$, rispettivamente lo spazio pseudo metrico e lo spazio metrico associato al *ppm-spazio*.

3.4 Approccio metrico basato sul concetto di distanza

Un altro possibile approccio alla geometria senza punti è basato unicamente sui concetti di *regione e distanza tra regioni.* In questo caso non è possibile parlare di metriche ma si fa riferimento ad un'altra tipologia di strutture: gli spazi quasi-pseudometrici. In $\mathbb{Re}$, l'esempio prototipico è dato dalla *misura per eccesso* di un insieme x rispetto a un insieme y, sulla quale è basata la definizione della *distanza di Hausdorff*.

Definizione 3.12. Dato uno spazio metrico (S,d), la *misura per eccesso* è la funzione $e_d: P(S)\times P(S) \rightarrow [0,\infty)$ definita ponendo per ogni x *e* y insiemi non vuoti di S

$$e_d(x,y) \coloneqq \sup\{d(P,y): P \in x\}$$

dove $d(P,y)$ rappresenta *la distanza del punto P e dall'insieme y*, a sua volta definita ponendo

$$d(P,y) \coloneqq \inf\{d(P,Q): Q \in y\}$$

Osservazione. Dato che gli elementi di $\mathbb{R}e$ sono limitati, nel modello prototipico il valore di $e_d(x,y)$ è sempre finito.

Proposizione 3.4. La *misura per eccesso* è una *quasi-pseudometrica.*

Questo suggerisce di riferirsi a questa particolare classe di strutture.

La teoria quasi-pseudometrica dello spazio si ottiene a partire dalla teoria metrica dello spazio eliminando la richiesta di simmetria dell'applicazione δ e la proprietà secondo cui: $\delta(x,y) = 0 \Rightarrow x = y$.

Si consideri quindi l'insieme $\mathcal{R}$ delle regioni, sia δ la funzione distanza tra regioni, con δ quasi-pseudometrica.

Inoltre, ad ogni spazio quasi-pseudometrico è possibile associare un pre-ordine nel modo seguente.

Proposizione 3.5. Sia $(\mathcal{R},\delta)$ uno spazio quasi-pseudometrico, allora la relazione $\leq$ definita ponendo:

$$x \leq y \overset{def}{\Longleftrightarrow} \delta(x,y) = 0$$

è un pre-ordine. Inoltre, si definisce il *diametro di* $z \in \mathcal{R}$ nel modo seguente:

$$|z| = \sup\{\delta(x,y): x \leq z \; e \; y \leq z\}$$

Nel modello prototipico il pre-ordine associato è *l'inclusione tra regioni*, precedentemente definita, e il *diametro* è l'usuale diametro di una regione.

Proposizione 3.6. In ℝe, per ogni $x, y\ tali\ che\ y \leq x$ si ha che $|x| \geq \delta(x, y)$. Ciò implica che una regione x è un atomo se e solo se $|x| = 0$.

Dim. Sia $|x| = 0$, allora per ogni regione y tale che $y \leq x$ si ha che

$\delta(x, y) = 0$ ed inoltre $\delta(y, x) = 0$. Dalle proprietà della quasi-pseudometriche si ottiene che $y = x$, pertanto x è un atomo.

Viceversa, se x è un atomo allora è evidente che $|x| = 0$. □

A differenza di quanto succedeva per i ppm-spazi l'applicazione δ non è order-reversing.

Proposizione 3.7. La funzione δ in uno spazio quasi-pseudometrico $(\mathcal{R}, \delta)$ è order-preserving rispetto alla prima variabile e order-reversing rispetto la seconda variabile. L'applicazione di diametro $|\cdot|: \mathcal{R} \rightarrow [0, \infty]$ è order-preserving.

Prima di passare a definire lo spazio quasi-metrico delle regioni, si osservi che $\|r\|$ andrà a denotare il valore assoluto di un qualsiasi numero reale r.

Definizione 3.13. Si definisce *spazio quasi-metrico di regioni* la struttura $(\mathcal{R}, \delta)$, dove l'applicazione δ è una quasi-pseudometrica, in cui sono soddisfatti i seguenti assiomi, per ogni $x, y \in \mathcal{R}$:

$\boldsymbol{Qm_1}$ $\|\delta(x, y) - \delta(y, x)\| \leq |x| + |y|$

$\boldsymbol{Qm_2}$ $(\forall n \in \mathbb{N})(\exists z \leq x)\ |z| \leq \dfrac{1}{n}$

Dall'assioma $\boldsymbol{Qm_1}$ si può osservare che se si restringe il campo alla classe delle regioni sufficientemente 'piccole', la funzione δ è approssimativamente simmetrica ed è, sempre approssimativamente, una metrica.

Quindi in un qualsiasi *spazio quasi-metrico di regioni* è possibile definire $(\mathbb{PA}^*, d)$ *e* $(\mathbb{EG}^*, \underline{d})$ esattamente come è stato fatto negli approcci precedentemente illustrati.

Teorema 3.3. Sia $(\mathcal{R}, \delta)$ uno *spazio quasi-metrico di regioni*. Allora $(\mathbb{PA}^*, d)$ è uno spazio pseudo-metrico e pertanto il quoziente $(\mathbb{EG}^*, \underline{d})$ è uno spazio metrico.

Dim. Occorre esclusivamente provare che la distanza d soddisfi la proprietà di simmetria. Per fare ciò si osservi che:

$$\delta(p_n, q_n) \leq \delta(q_n, p_n) + |p_n| + |q_n|$$

quindi

$$d(\langle p_n \rangle_{n\in\mathbb{N}}, \langle q_n \rangle_{n\in\mathbb{N}}) = \lim_{n\to\infty} \delta(p_n, q_n) \leq \lim_{n\to\infty} \delta(q_n, p_n) + \lim_{n\to\infty} |p_n| + \lim_{n\to\infty} |q_n|$$

$$\Rightarrow d(\langle p_n \rangle_{n\in\mathbb{N}}, \langle q_n \rangle_{n\in\mathbb{N}}) \leq \lim_{n\to\infty} \delta(q_n, p_n) = d(\langle q_n \rangle_{n\in\mathbb{N}}, \langle p_n \rangle_{n\in\mathbb{N}})$$

Il ragionamento è analogo per provare che:

$$d(\langle q_n \rangle_{n\in\mathbb{N}}, \langle p_n \rangle_{n\in\mathbb{N}}) \leq d(\langle p_n \rangle_{n\in\mathbb{N}}, \langle q_n \rangle_{n\in\mathbb{N}})$$

□

Capitolo 4

Approccio alla geometria senza punti basato sulla logica a più valori

Nel seguente capitolo verrà illustrato come associare a ciascuno degli approcci metrici alla geometria senza punti, precedentemente analizzati, una teoria del primo ordine della logica a più valori. Per far ciò saranno introdotti opportuni predicati vaghi il cui significato è di natura geometrica (per esempio 'close', 'small', 'contained'). Formulata una teoria T del primo ordine all'interno della logica a più valori, attraverso un generatore additivo, sarà possibile stabilire una sorta di dualità, mostrando che ogni modello della teoria T può essere trasformato in un modello delle strutture dell'approccio metrico preso in considerazione. Per tanto ogni modello di T sarà associato ad uno spazio metrico.

4.1 Introduzione

Sotto il nome di logica a più valori ricadono numerosi studi che hanno segnato la storia e lo sviluppo della logica formale. La differenza fondamentale con la logica classica è data dal fatto che il numero di valori di verità non è limitato a due ma si ammette un insieme più ampio di valori di verità che potrà essere un insieme finito ordinato, un insieme infinito numerabile o un insieme continuo come, per es. l'intervallo [0,1] della retta reale. Il primo a parlare di logica a più valori è stato il filosofo e logico polacco Jan Łukasiewicz che nel 1920, con lo scopo di fornire una generalizzazione della logica classica, introdusse un terzo valore di verità per rappresentare il concetto di 'possibilità' all'interno di uno schema vero funzionale. Successivamente Łukasiewicz e Tarsky formularono una logica in cui fossero presenti n possibili valori di verità. L'idea di logica a più valori venne proposta, indipendentemente, anche da Emil Post nel 1921. Nel 1932 Kurt Gödel descrisse il sistema delle *logiche di Gödel* (Gödel logic) costituito da una famiglia di logiche del primo ordine a più valori in cui l'insieme dei valori di verità è un sottoinsieme chiuso dell'intervallo [0,1], contenente entrambi i valori 0 e 1. Successivamente a questi studi riguardanti la pura logica a più valori, Lotfi Zadeh iniziò un'analisi volta ad una estensione della classica teoria degli insiemi: nel 1965 pubblicò un articolo contenente il concetto di insieme fuzzy ('sfumato') e i principi di base della sua teoria. Un insieme fuzzy è caratterizzato da una funzione di grado di appartenenza, che mappa gli elementi di un universo in un intervallo reale continuo [0;1]: il valore 0 indica che l'elemento non è 'per niente' incluso nell'insieme fuzzy, il valore 1 indica che l'elemento è certamente incluso nell'insieme e i restanti valori indicano i restanti gradi di appartenenza dell'elemento all'insieme. La teoria degli insiemi fuzzy ha ispirato numerose considerazioni all'interno della logica a più valori. A tale teoria è legata la logica fuzzy, una logica a più valori in cui ad ogni proposizione si può attribuire un grado di verità compreso tra 0 e 1. Inizialmente il termine 'logica fuzzy' veniva utilizzato per indicare una qualsiasi logica dotata di più di due valori di verità. In seguito venne intesa come *la teoria del ragionamento approssimato* e ancora come *la teoria della logica linguistica* (per ulteriori approfondimenti vedere [8] e [14]). Tra i numerosi approcci alla logica a più valori si possono ancora citare la logica continua di Chang e Keisler e la logica fuzzy di Pavelka.

Tutti questi lavori sono stati successivamente rielaborati in modo da poter estendere la teoria dei modelli a importanti classi di strutture che non possono essere definite con una logica classica del primo ordine. Si fa riferimento a strutture in cui vengono assunte come primitive funzioni a valori reali, come ad esempio gli spazi metrici, spazi di misura, spazi normati e spazi di probabilità; l'idea di base è quella di poter reinterpretare i numeri reali come valori di verità e le funzioni a valori reali come dei predicati vaghi di una logica del primo ordine a più valori. È possibile applicare questa idea alla geometria senza punti.

4.2 Approccio "*close-small*"

Si consideri l'approccio metrico alla geometria senza punti basato sulle nozioni primitive di *regione*, *inclusione*, *distanza* e *diametro*, descritto nel paragrafo 3.2 del capitolo precedente. Di seguito sarà mostrato come trasformare l'approccio metrico fornito dai *ppm-spazi* in un approccio multi-valued.

Definizione 4.1. Si consideri un linguaggio L del primo ordine con tre simboli si predicato *'≤'*, *'Close'* e *'Small'*. Si definisce *c-s-teoria (point-free theory based on closeness and smallness)* la seguente teoria:

$\boldsymbol{O}$ $Order(\leq)$

$\boldsymbol{Sm1}$ $\forall x \forall y \big(x \leq y \wedge Small(y) \Rightarrow Small(x)\big)$

$\boldsymbol{Sm2}$ $\forall x \exists z \big(z \leq x \wedge Small(z)\big)$

$\boldsymbol{Cl1}$ $\forall x \forall y \big(x \leq y \wedge Close(x,y) \Rightarrow Close(y,z)\big)$

$\boldsymbol{Cl2}$ $\forall x Close(x,x)$

$\boldsymbol{Cl3}$ $\forall x \forall y \big(Close(x,y) \Rightarrow Close(y,x)\big)$

$\boldsymbol{Cl4}$ $\forall x \forall y \forall z \big(Close(x,z) \wedge Close(z,y) \wedge Small(z) \Rightarrow Close(x,y)\big)$

Osservazione. L'assioma $\boldsymbol{Cl4}$ afferma che la relazione '*Close*' è transitiva se e solo se si considerano regioni piccole.

Definizione 4.2. Si definisce *c-s-struttura* un modello della teoria data nella definizione 4.1. Una *c-s-struttura* è una quadrupla $(\mathcal{R}, \leq, close, small)$ tale che $\leq$ è una relazione d'ordine, $close$ è order-preserving, $small$ è order-reversing e inoltre:

- ❖ $close(x,x) = 1$
- ❖ $close(x,y) = close(y,x)$
- ❖ $\big(close(x,z) \otimes close(z,y)\big) \otimes small(z) \leq close(x,y)$
- ❖ $\forall x \in \mathcal{R}, \forall\, n \in \mathbb{N}, \exists z \leq x : small(z) \geq 1 - \frac{1}{n}$

dove $\otimes$ è una *t-norma continua e archimedea*.

Data quindi una *c-s-struttura* così definita è possibile dimostrare il seguente teorema.

Teorema 4.1. Sia $\otimes$ una *t-norma archimedea*. Allora ogni *c-s-struttura* è associata ad un *ppm-spazio*.

Dimostrazione. Essendo, per ipotesi, $\otimes$ una t-norma archimedea si consideri la funzione *generatore additivo* associata all'operatore $\otimes$:

$$f: [0,1] \rightarrow [0, \infty]$$

Tramite questa funzione f è possibile definire una distanza δ e un diametro $|\cdot|$, in modo che la struttura $(\mathcal{R}, \leq, \delta, |\cdot|)$ sia un ppm-spazio, nella maniera seguente:

$$\delta(x, y) \coloneqq f\big(close(x, y)\big)$$

e

$$|x| \coloneqq f\big(small(x)\big)$$

Si osservi innanzi tutto che le funzioni δ e $|\cdot|$ cosi definite sono rispettivamente order-reversing e order-preserving, esattamente come richiesto nella definizione di ppm-spazio. Occorre quindi verificare che con le posizioni appena fatte siano soddisfatti gli assiomi:

$\boldsymbol{ppm_1}$ $\delta(x, x) = 0$

$\boldsymbol{ppm_2}$ $\delta(x, y) = \delta(y, x)$

$\boldsymbol{ppm_3}$ $\delta(x, y) \leq \delta(y, z) + \delta(z, x) + |z|$

$\boldsymbol{ppm_4}$ $(\forall n \in \mathbb{N})(\exists z \leq x)\ |z| \leq \frac{1}{n}$

che vanno a caratterizzare i ppm-spazi. L'assioma $\boldsymbol{ppm_1}$ è ovviamente verificato infatti, per ogni elemento $x \in \mathcal{R}$:

$$close(x, x) = 1$$

quindi dalla definizione di generatore additivo f:

$$\delta(x,x) = f\big(close(x,x)\big) = f(1) = 0$$

L'assioma $\boldsymbol{ppm_2}$ segue immediatamente dalle proprietà dell'operatore $close$. Infatti si ha che, presi $x, y \in \mathcal{R}$:

$$close(x,y) = close(y,x)$$

pertanto applicando la funzione f, che è strettamente decrescente per definizione, ad ambo i membri, è vera la seguente catena di uguaglianze:

$$\delta(x,y) = f\big(close(x,y)\big) = f\big(close(y,x)\big) = \delta(y,x)$$

Per dimostrare l'assioma $\boldsymbol{ppm_3}$ basti osservare che data f, generatore additivo di $\otimes$, l'operatore $\otimes$ si definisce nel modo seguente:

$$x \otimes y = f^{[-1]}\big(f(x) + f(y)\big) \ \ (*)$$

Presi dunque $x, y, z \ \in \mathcal{R}$ dalla proprietà $\boldsymbol{Cl_4}$:

$$(close(x,z) \otimes close(z,y)) \otimes small(z) \leq close(x,y)$$

sostituendo $(*)$ si ha che:

$$f^{-1}\left(f\left(f^{-1}\left(f\big(close(x,z)\big) + f\big(close(z,y)\big)\right)\right) + f\big(small(z)\big)\right) \leq close(x,y)$$

Quindi, applicando f, funzione decrescete, ad ambo i membri:

$$f\left(f^{-1}\left(f\big(close(x,z)\big) + f\big(close(z,y)\big)\right)\right) + f\big(small(z)\big) \geq f\big(close(x,y)\big)$$

$$\Rightarrow \ f\big(f^{-1}\big(\delta(x,z) + \delta(z,y)\big)\ \big) + |z| \geq \delta(x,y) \ \ (**)$$

Grazie alla proprietà della funzione generatore additivo secondo cui:

$$f\big(f^{-1}(x)\big) \leq x \ (\star)$$

dalla $(**)$ si ricava l'assioma $\boldsymbol{ppm_3}$:

$$\delta(x,z) + \delta(z,y) + |z| \geq f\big(f^{-1}\big(\delta(x,z) + \delta(z,y)\big)\ \big) + |z| \geq \delta(x,y)$$

$$\Rightarrow \ \delta(x,z) + \delta(z,y) + |z| \geq \delta(x,y)$$

Per dimostrare l'assioma $\boldsymbol{ppm_4}$, si consideri $x \in \mathcal{R}$, dalla $\boldsymbol{Sm_2}$:

$$\sup\{small(r) : r \leq x\} = 1$$

Fissato $n \in \mathbb{N}$ inoltre si ha che:

$$f^{-1}\left(\frac{1}{n}\right) \leq f^{-1}(0) = 1$$

Pertanto $\forall n \in \mathbb{N}$ esiste un elemento $r \leq x$, tale che:

$$small(r) \geq f^{-1}\left(\frac{1}{n}\right)$$

Applicando ancora la funzione f , decrescente, ad ambo i membri, e per la proprietà $(\star)$ utilizzata nel dimostrare l'assioma precedente:

$$|r| \leq f(small(r)) \leq f\left(f^{-1}\left(\frac{1}{n}\right)\right) \leq \frac{1}{n}$$

$$\Rightarrow |r| \leq \frac{1}{n}$$

◻

Corollario 4.1. Sia $\otimes$ una t-norma archimedea. Allora ogni *c-s-struttura* è associata ad uno spazio metrico.

Dimostrazione. Per il teorema precedente, ad ogni *c-s-struttura* è associato un *ppm-spazio*. Ma ad ogni *ppm-spazio* è associato uno spazio metrico $(\mathbb{EG}^*, \underline{d})$. Pertanto ad ogni *c-s-struttura* sarà associato uno spazio metrico.

In base a quanto dimostrato, è possibile dare le seguenti definizioni di *punto* e di distanza tra punti all'interno di uno spazio metrico associato a una *c-s-struttura*.

Definizione 4.3. In uno spazio metrico associato alla *c-s-struttura* $(\mathcal{R}, \leq, close, small)$, si definisce *punto* una classe completa di equivalenza definita dalle sequenze $\langle x_n \rangle_{n \in \mathbb{N}}$ order-reversing di regioni tali che:

$$\lim_{n \to \infty} small(x_n) = 1$$

La distanza tra due punti $[\langle x_n \rangle_{n\in\mathbb{N}}]$ e $[\langle y_n \rangle_{n\in\mathbb{N}}]$ è definita ponendo:

$$\underline{d}([\langle x_n \rangle_{n\in\mathbb{N}}], [\langle y_n \rangle_{n\in\mathbb{N}}]) = f\left(\lim_{n\to\infty} close(x_n, y_n)\right)$$

4.3 Approccio "*small*"

Il secondo approccio metrico, descritto nel paragrafo 3.3 del capitolo precedente, è basato unicamente sulle nozioni di *regione, relazione di inclusione e diametro di regioni*. Data la definizione di *diametric poset*, è stata definita una opportuna *distanza* tra regioni così da poter associare un *ppm-spazio* a ciascun *diametric poset* e pertanto uno spazio metrico.

Riprendendo in parte la definizione 4.2.1. del paragrafo precedente, la seguente teoria del primo ordine si ottiene aggiungendo un opportuno assioma riguardante i simboli di predicato $' \leq '$ e $'Small'$.

Definizione 4.4. Si consideri un linguaggio L del primo ordine con i simboli di predicato $' \leq '$ e $'Small'$. Allora si definisce *s-teoria* (*point-free theory based on smallness*) una teoria soddisfacente gli assiomi:

$\boldsymbol{O}$ $Order(\leq)$

$\boldsymbol{Sm}$**1** $\forall x \forall y\big(x \leq y \land Small(y) \Rightarrow Small(x)\big)$

$\boldsymbol{Sm}$**2** $\forall x \exists z\big(z \leq x \land Small(z)\big)$

$\boldsymbol{Sm}$**3** $xOy \Rightarrow \exists r\left(x \leq r \land y \leq r \land Ct\big(Small(x) \land Small(y) \Rightarrow Small(r)\big)\right)$

dove *Ct* è il connettivo logico tale che, data una formula α, il significato di $Ct(\alpha)$ è che la formula è completamente vera.

Definizione 4.5. Si definisce *s-struttura* un modello della teoria data nella definizione 4.4. Una *s-struttura* è una struttura del tipo $(\mathcal{R}, \leq,\ small)$ tale che $\leq$ è una relazione d'ordine, $small$ è order-reversing e inoltre:

- ❖ $\forall x \in \mathcal{R}, \forall\, n \in \mathbb{N}, \exists z \leq x : small(z) \geq 1 - \frac{1}{n}$

Teorema 4.2. Sia $\otimes$ una *t-norma archimedea*. Allora ogni *s-struttura* è associata ad un *diametric poset*.

Dimostrazione. Sia $(\mathcal{R}, \leq, small)$ una *s-struttura* e sia f il *generatore additivo* associato alla t-norma $\otimes$, la funzione:

$$f: [0,1] \to [0, \infty]$$

Tramite questa funzione f è possibile definire un diametro $|\cdot|$, in modo che la struttura $(\mathcal{R}, \leq, |\cdot|)$ sia un *diametric poset*, nella maniera seguente:

$$|x| \coloneqq f\big(small(x)\big)$$

Si osservi che per la decrescenza di f la funzione *diametro* così definita è order-preserving. Occorre dimostrare che, con la definizione di diametro appena data, siano verificate, per ogni $x, y, z \in \mathcal{R}$, le proprietà:

$\boldsymbol{D_1}$ $xOy\ comporta\ l'esistenza\ di\ una\ regione\ r\ tale\ che$:

$$x \leq r, y \leq r\ e\ |r| \leq |x| + |y|$$

$\boldsymbol{D_2}$ $esiste\ una\ regione\ limitata\ z\ tale\ che\ zOx\ e\ zOy$

$\boldsymbol{D_3}$ $data\ x, per\ ogni\ n > 0\ esiste\ z \leq x\ tale\ che\ |z| \leq \dfrac{1}{n}$

che definiscono i *diametric poset*. Per dimostrare la proprietà $\boldsymbol{D_1}$, si supponga che, date $x, y \in \mathcal{R}$, xOy. Per l'assioma $\boldsymbol{Sm3}$ la formula

$$\exists r\left(x \leq r \wedge y \leq r \wedge Ct\big(Small(x) \wedge Small(y) \Rightarrow Small(r)\big)\right)$$

assume valore 1 e pertanto, date $x, y \in \mathcal{R}$:

$$\sup\big\{ct\big(small(x) \otimes small(y) \to small(r)\big): x \leq r\ e\ y \leq r\big\} = 1$$

Questo implica che esiste una regione $r \geq x, y$ tale che:

$$ct\big(small(x) \otimes small(y) \to small(r)\big) = 1$$

Per come sono stati definiti il connettivo logico *Ct* e la sua interpretazione si ha che:

$$ct\big(small(x) \otimes small(y) \rightarrow small(r)\big) = 1 \Leftrightarrow$$

$$small(x) \otimes small(y) \rightarrow small(r) = 1$$

Per le proprietà del residuo → associato alla t-norma ⊗, ciò è equivalente a:

$$small(x) \otimes small(y) \leq small(r) \ (*)$$

Essendo f generatore additivo di ⊗ e applicazione order-reversing, dalla (*) si ha che:

$$f^{[-1]}\Big(f\big(small(x)\big) + f\big(small(y)\big)\Big) \leq small(r)$$

$$\Leftrightarrow f\left(f^{[-1]}\Big(f\big(small(x)\big) + f\big(small(y)\big)\Big)\right) \geq f\big(small(r)\big) \ (**)$$

Per le proprietà di f generatore additivo:

$$f\big(small(x)\big) + f\big(small(y)\big) \geq \ f\left(f^{[-1]}\Big(f\big(small(x)\big) + f\big(small(y)\big)\Big)\right)$$

Quindi, con le posizioni considerate e dalla (**), si ottiene:

$$|x| + |y| = f\big(small(x)\big) + f\big(small(y)\big) \geq f\big(small(r)\big) = |r|$$

$$\Leftrightarrow |x| + |y| \geq |r|$$

Le proprietà $\boldsymbol{D_2}$ *e* $\boldsymbol{D_3}$ seguono dagli assiomi della *s-struttura*.

Corollario 4.2. Sia ⊗ una *t-norma archimedea*, allora ogni *s-struttura* è associata ad uno spazio metrico.

Dimostrazione. Per il teorema precedente, ogni *s-struttura* è associata ad un *diametric poset*. Ad ogni *diametric poset* è associato un *ppm-spazio* e quindi uno spazio metrico $\left(\mathbb{E}\mathbb{G}^*, \underline{d}\right)$. Pertanto ad ogni s-struttura sarà associato uno spazio metrico.

4.4 Approccio "*graded inclusion*"

Il terzo approccio alla geometria senza punti proposto nel capitolo precedente è basato unicamente sui concetti di *regione e distanza tra regioni*. In tal caso si è fatto riferimento a una diversa classe di strutture, gli spazi quasi-pseudometrici, in cui una volta definita una quasi-pseudometrica è stata introdotta una relazione di pre-ordine, che nel modello prototipico andava a coincidere con la relazione di inclusione. Con questi strumenti è stato possibile definire la nozione di diametro, che nel modello prototipico coincideva con l'usuale definizione di diametro. Successivamente si è dimostrato che ad uno *spazio quasi-metrico di regioni* $(\mathcal{R}, \delta)$ è associato lo spazio metrico $(\mathbb{E}\mathbb{G}^*, \ \underline{d})$.

Per trasformare questo approccio metrico in un approccio a più valori, occorre definire un linguaggio del primo ordine dotato di un simbolo di relazione *'Incl'* che viene ad essere interpretato con una *inclusione graduata*. Una interpretazione di questo linguaggio è data dalla coppia $(\mathcal{R}, incl)$ dove $\mathcal{R}$ è un insieme non vuoto e $incl$: $\mathcal{R}\times\mathcal{R} \to [0,1]$ una relazione fuzzy binaria. Inoltre, data la formula:

$$Ct\big(Incl(x,y)\big)$$

essa verrà abbreviata con $'x \leq y'$, il cui significato è che la relazione $' \leq '$ è l'ordinaria inclusione, mentre la formula:

$$Incl(x,y) \wedge Incl(y,x)$$

sarà abbreviata con $'Eq(x,y)'$ e andrà ad esprimere una *uguaglianza graduata*. Inoltre si andrà ad abbreviare con $'Pl(x)'$ la formula:

$$\forall z\big(z \leq x \to Eq(x,z)\big)$$

Quest'ultima rappresenta una versione fuzzy della definizione di *punto* data da Euclide come elemento geometrico che non ha parti, ossia come un elemento *x* tale che se $y \leq x$ allora necessariamente $x = y$. Un qualsiasi *x* che soddisfa la formula $'Pl(x)'$ sarà definito *point-like region*.

Definizione 4.6. Si dice *teoria senza punti basata su una inclusione graduata* il seguente sistema di assiomi:

$\boldsymbol{A_1}$ $\forall x\big(Incl(x,x)\big)$

$\boldsymbol{A_2}$ $\forall x \forall y \forall z\big(Incl(x,z) \wedge Incl(z,y) \Rightarrow Incl(x,y)\big)$

$\boldsymbol{A_3}$ $\forall x \forall y\big(Pl(x) \wedge Pl(y) \wedge Incl(x,y) \Rightarrow Incl(y,x)\big)$

A_4 $\forall x \exists z\big(z \leq x \wedge Pl(x)\big)$

Definizione 4.7. Si definisce *spazio di inclusione graduata* un modello di $\boldsymbol{A_1 - A_4}$.

Osservazione. Gli assiomi $\boldsymbol{A_1}$ e $\boldsymbol{A_2}$ dicono che $'Incl'$ è un pre-ordine graduato, mentre l'assioma $\boldsymbol{A_3}$ afferma che la relazione $'Incl'$ è simmetrica se e solo se si considerano *point-like region* e che quindi tale relazione è una *equivalenza graduata* nella classe di queste regioni.

Teorema 4.3. Sia $\otimes$ una t-norma archimedea, dato $(\mathcal{R}, incl)$ un modello della teoria senza punti basata su una *inclusione graduata* esso sarà associato ad uno *spazio quasi-metrico di regioni* $(\mathcal{R}, \delta)$.

Dimostrazione. Sia f un *generatore additivo* associato alla t-norma $\otimes$, si consideri la funzione distanza δ tra regioni definita ponendo:

$$\delta(x,y) \coloneqq f\big(incl(x,y)\big)$$

Per provare che la struttura $(\mathcal{R}, \delta)$ sia uno *spazio quasi-metrico di regioni* occorre innanzi tutto dimostrare che la funzione δ così definita sia una quasi-metrica. Dall'assioma $\boldsymbol{A_1}$ segue che:

$$\delta(x,x) = 0$$

Dall'assioma $\boldsymbol{A_2}$ si ha che:

$$incl(x,z) \otimes incl(z,y) \leq incl(x,y)$$

Ma essendo *f* il generatore additivo associato alla t-norma:

$$f^{[-1]}\left(f\big(incl(x,z)\big)+f\big(incl(z,y)\big)\right)\leq incl(x,y)$$

Applicando *f*, funzione order-reversing, ad ambo i membri, per le proprietà del generatore additivo si ottiene:

$$\begin{aligned}f\big(incl(x,z)\big)+f\big(incl(z,y)\big) &\geq f\left(f^{[-1]}\left(f\big(incl(x,z)\big)+f\big(incl(z,y)\big)\right)\right)\\ &\geq f\big(incl(x,y)\big)\end{aligned}$$

$$\Rightarrow\ \delta(x,z)+\ \delta(z,y)=f\big(incl(x,z)\big)+f\big(incl(z,y)\big)\geq f\big(incl(x,y)\big)=\ \delta(x,y)$$

$$\Rightarrow\ \delta(x,z)+\ \delta(z,y)\ \geq\ \delta(x,y)$$

Si può facilmente provare che è soddisfatta la proprietà:

$$\delta(x,y)=0\ e\ \delta(y,x)=0\Rightarrow x=y$$

La funzione δ così definita è una quasi-pseudometrica, pertanto per dimostrare che la struttura $(\mathcal{R},\delta)$ sia uno *spazio quasi-metrico di regioni* rimangono da provare le proprietà:

$\boldsymbol{Qm_1}$ $\|\delta(x,y)-\delta(y,x)\|\leq|x|+|y|$

$\boldsymbol{Qm_2}$ $(\forall n\in\mathbb{N})(\exists z\leq x)\ |z|\leq\dfrac{1}{n}$

Per dimostrare che δ soddisfa la proprietà $\boldsymbol{Qm_1}$ è necessario osservare che:

$$f\big(pl(x)\big)=f(\inf\{incl(x,z):z\leq x\})$$

Da cui, essendo *f* order-reversing e per come è stato definito il diametro di una regione x assegnata una quasi-metrica δ, si ha:

$$f\big(pl(x)\big)=\sup\{f(incl(x,z):z\leq x\}=\sup\{\delta(x,z):z\leq x\}=|x|\ (*)$$

Inoltre nel caso in cui $\delta(y,x)\geq\delta(x,y)$, cioè $f\big(incl(y,x)\big)\geq f\big(incl(x,y)\big)$ si ha che:

$$f\big(incl(y,x)\big)-f\big(incl(x,y)\big)\leq f\big(incl(y,x)\big)\leq f(0)$$

Allora, per le proprietà della funzione f generatore additivo:

$$f\left(f^{[-1]}\left(f\big(incl(y,x)\big)-f\big(incl(x,y)\big)\right)\right)=f\big(incl(y,x)\big)-f\big(incl(x,y)\big)\ (**)$$

Dall'assioma $\boldsymbol{A_3}$ si ha che, per le proprietà della t-norma e del relativo residuo:

$$pl(x)\otimes pl(y)\leq\big(incl(x,y)\rightarrow incl(y,x)\big)$$

Pertanto:

$$f^{[-1]}\Big(f\big(pl(x)\big)+f\big(pl(y)\big)\Big)\leq f^{[-1]}\Big(f\big(incl(x,y)\big)-f\big(incl(y,x)\big)\Big)$$

Applicando f ad ambo i membri e per l'uguaglianza $(**)$:

$$f\left(f^{[-1]}\Big(f\big(pl(x)\big)+f\big(pl(y)\big)\Big)\right)\geq f\left(f^{[-1]}\Big(f\big(incl(y,x)\big)-f\big(incl(x,y)\big)\Big)\right)$$
$$=f\big(incl(y,x)\big)-f\big(incl(x,y)\big)$$

Per le proprietà del generatore additivo e l'uguaglianza $(*)$, si ottiene la proprietà $\boldsymbol{Qm_1}$:

$$|x|+|y|=f\big(pl(x)\big)+f\big(pl(y)\big)\geq f\left(f^{[-1]}\Big(f\big(pl(x)\big)+f\big(pl(y)\big)\Big)\right)\geq$$
$$\geq f\left(f^{[-1]}\Big(f\big(incl(y,x)\big)-f\big(incl(x,y)\big)\Big)\right)=$$
$$=f\big(incl(y,x)\big)-f\big(incl(x,y)\big)\geq\left\|f\big(incl(y,x)\big)-f\big(incl(x,y)\big)\right\|$$
$$=\|\delta(y,x)-\delta(x,y)\|$$
$$\Rightarrow|x|+|y|\geq\|\delta(y,x)-\delta(x,y)\|$$

Per provare la proprietà $\boldsymbol{Qm_2}$ basta osservare che per l'assioma $\boldsymbol{A_4}$ per ogni x si ha che:

$$\sup\{pl(x):z\leq x\}=1$$

ed essendo f funzione order-reversing

$$\inf\{|z|:z\leq x\}=\inf\big\{f\big(pl(z)\big):z\leq x\big\}=f(\sup\{pl(z):z\leq x\})=f(1)=0$$

Da ciò si ricava:

$$(\forall n\in\mathbb{N})(\exists z\leq x)\left(|z|\leq\frac{1}{n}\right)$$

Corollario 4.2. Sia $\otimes$ una t-norma archimedea, allora ogni modello della *teoria senza punti basata su una inclusione graduata* è associato ad uno spazio metrico.

Dimostrazione. Per il teorema precedente, ogni modello di tale teoria è associato ad uno *spazio quasi-metrico di regioni*, a cui per il Teorema 3.3. è associato uno spazio metrico $\left(\mathbb{EG}^*, \underline{d}\right)$. Pertanto ogni modello è associato ad uno spazio metrico.

Conclusioni

La riformulazione matematica delle idee proposte da Whitehead ha consentito tra l'altro di porre l'accento sulle ragioni che hanno portato al passaggio dalle strutture di inclusione alle strutture di connessione. È stato mostrato come a partire dalla relazione di *connessione* sia possibile definire la relazione di *inclusione* tra regioni. Il viceversa non è in generale possibile. Inoltre, la definizione di punto non è del tutto soddisfacente all'interno delle *strutture di inclusione*. Tuttavia, come mostrato in [3], l'approccio basato sulla relazione di inclusione funziona bene nel momento in cui si passa a ragionare all'interno della logica a più valori e si considera una inclusione graduata al posto di una inclusione *'crisp'*: è possibile provare che all'interno di uno *spazio di inclusione graduata* si può definire una *relazione di connessione* tra regioni.

Un problema aperto è quello di trovare un sistema di assiomi tale da caratterizzare le *strutture di inclusione* il cui spazio metrico associato sia isometrico allo spazio metrico euclideo.

Le ricerche che si sono sviluppate a partire da quanto proposto da Whitehead non si sono limitate alla sola fondazione della geometria. Negli ultimi tempi hanno interessato diversi ambiti, come la teoria della computabilità, la teoria dei reticoli e il trattamento dell'informazione. In quest'ultimo contesto, ad esempio, il concetto di *regione* può essere reinterpretato per rappresentare pezzi di informazione non completa: il *diametro* fornisce una misura dell'incompletezza di una informazione ed il *punto* rappresenta una informazione completa. In tale contesto la nozione di spazio metrico ricopre un ruolo importante: gli oggetti da esaminare sono rappresentati come punti in uno spazio e la distanza tra punti rappresenta una misura della "*dissimilarità*" tra oggetti.

Bibliografia

[1] COPPOLA C., *Distance and closeness measures in information space*, PhD Thesis. Università degli Studi di Napoli Federico II (2006).

[2] COPPOLA C., GERLA G., Mereological foundation of geometry via multi-valued logic, *Logic and logical philosophy*, vol. 24, n.4 (2015). *Special issue: Mereology and Beyond.*

[3] COPPOLA C., GERLA G., MIRANDA A., Point-free foundation of geometry and multi-valued logic, *Notre Dame Journal of Formal Logic*, 51, 3 (2010): 383-405.

[4] DI CONCILIO A., GERLA G., Quasi-metric spaces and point-free geometry, *Mathematical Structures in Computer Science*, 16, 1 (2006): 115-137.

[5] GERLA G., Pointless metric spaces, *Journal of Symbolic Logic*, 55 (1990): 207-219.

[6] GERLA G., Un punto dal volto di Gatto, *Periodico di Matematiche*, I e II, 3 (2006) 9-20, 4 (2006) 15-25.

[7] KELLY J. L., *General Topology*, Springer-Verlag, 1975.

[8] NOVÁK V., PERFILIEVA I., MOČKOŘ J., *Mathematical Principles of Fuzzy Logic*, Spinger, 1999.

[9] PULTR A., Pointless uniformities II: (Dia)metrization, *Comment. Math. Univ. Carolinae*, 25 (1984): 104-120.

[10] PULTR A., Diameters in locales: How bad they can be?, *Comment. Math. Univ. Carolinae*, 4 (1998): 731-742.

[11] WHITEHEAD A.N., *An Inquiry Concerning the Principles of Natural Knowledge*, Univ. Press, Cambrige, 1919.

[12] WHITEHEAD A.N., *The Concept of Nature*, Univ. Press, Cambrige, 1920.

[13] WHITEHEAD A.N., *Process and Reality*, Macmillan, N.Y., 1929.

[14] http://plato.stanford.edu/entries/logic-manyvalued/